

**HƯỚNG DẪN CHẤM BÀI THI OLYMPIC LIÊN CỤM TRƯỜNG THPT
NĂM HỌC 2020 - 2021 - MÔN TOÁN LỚP 11**

Bài I. (4.0 điểm)

Câu	Nội dung	Điểm
1 (3.0 điểm)	$\sin x + \sqrt{3} \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) = 1 \Leftrightarrow \sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$	1.0
	$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$	1.0
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$	1.0
2 (1.0 điểm)	Giả sử: $AB = a$. Khi đó ta có: $\sin B = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AH = AB \cdot \sin B = a \sin B$. $\cos B = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = AB \cdot \cos B = a \cos B \Rightarrow BC = 2BH = 2a \cdot \cos B$ ($\triangle ABC$ cân)	0.25
	BC, AH, AB là cấp số nhân $\Leftrightarrow BC \cdot AB = AH^2 \Leftrightarrow 2a^2 \cdot \cos B = a^2 \cdot \sin^2 B$	0.25
	$\Leftrightarrow \cos^2 B + 2 \cos B - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos B = -1 - \sqrt{2} (L) \\ \cos B = -1 + \sqrt{2} \end{cases}$	0.25
	Khi đó, công bội $q = \frac{AB}{AH} = \frac{1}{\sin B} = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 B}} = \frac{1}{\sqrt{-2 + 2\sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$.	0.25

Bài II. (4.0 điểm)

Câu	Nội dung	Điểm
1 (3.0 điểm)	Từ 1 đến 25 có 13 số lẻ, 12 số chẵn.	0.75
	TH1: Bốc 2 tấm thẻ mang số lẻ, 1 tấm mang số chẵn $\Rightarrow$ Có $C_{13}^2 \cdot C_{12}^1 = 936$ cách	0.75
	TH2: Bốc 3 thẻ mang số lẻ từ 13 thẻ $\Rightarrow$ Có $C_{13}^3 = 286$ cách	0.75
	Vậy có $936 + 286 = 1222$ cách bốc được ít nhất 2 thẻ mang số lẻ.	0.75
2 (1.0 điểm)	Bốc 3 thẻ ngẫu nhiên từ 25 thẻ $\Rightarrow n(\Omega) = C_{25}^3 = 2300$.	0.25
	A : "Bốc được 3 thẻ ghi 3 số trong đó không có 2 số nào là hai số tự nhiên liên tiếp" Gọi 3 số tự nhiên bốc được là $a; b; c$ với $1 \leq a < b < c \leq 25$. Do không có 2 số nào là hai số tự nhiên liên tiếp nên $1 \leq a < b-1 < c-2 \leq 23$.	0.25
	Mỗi cách chọn bộ 3 số $a; b; c$ thỏa mãn đề bài tương ứng với một cách chọn bộ 3 số tự nhiên phân biệt $a; b-1; c-2$ từ tập $\{1; 2; \dots; 22; 23\} \Rightarrow n(A) = C_{23}^3 = 1771$.	0.25
	Xác suất để xảy ra biến cố A là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1771}{2300}$.	0.25

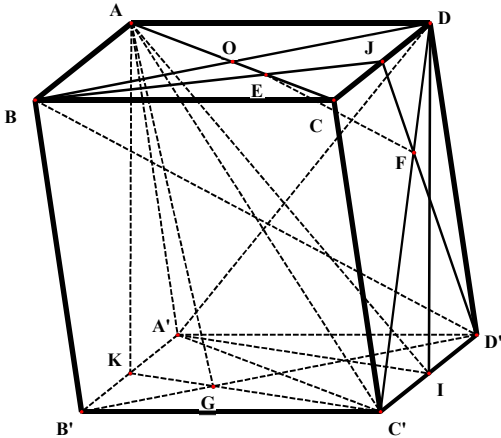
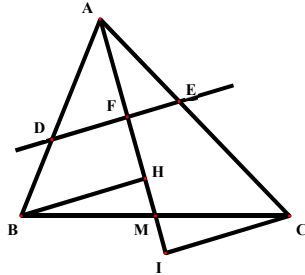
Bài III. (3.0 điểm)

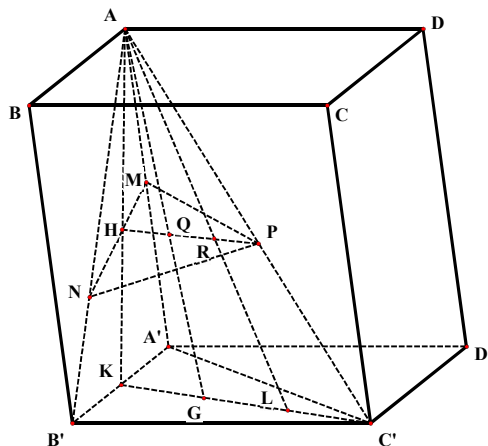
	Nội dung	Điểm
(3.0 điểm)	ĐK: $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$. $3A_{n-1}^2 - 5C_n^2 = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \frac{(n-1)!}{(n-1-2)!} - 5 \cdot \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} = 0$	0.5
	$\Leftrightarrow 3 \cdot (n-1)(n-2) - 5 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 0 \Leftrightarrow n^2 - 13n + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 12 & (\text{T/m}) \\ n = 1 & (\text{L}) \end{cases}$	1.0
	$\left(2x - \frac{1}{2x^2}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} (-1)^k C_{12}^k \cdot (2x)^{12-k} \cdot \left(\frac{1}{2x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{12} (-1)^k C_{12}^k \cdot 2^{12-2k} \cdot x^{12-3k}$	1.0
	Số hạng không chứa $x \Rightarrow 12 - 3k = 0 \Leftrightarrow k = 4$ $\Rightarrow$ Số hạng cần tìm: $(-1)^4 \cdot C_{12}^4 \cdot 2^4 = 7920$.	0.5

Bài IV. (3.0 điểm)

Câu	Nội dung	Điểm
1 (1.5 điểm)	Để thấy: $u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$. $u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + 2}{3}} \Leftrightarrow u_{n+1}^2 = \frac{u_n^2 + 2}{3} \Leftrightarrow u_{n+1}^2 - 1 = \frac{u_n^2 + 2}{3} - 1 \Leftrightarrow u_{n+1}^2 - 1 = \frac{1}{3}(u_n^2 - 1)$	0.75
	$\Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{3} v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \text{dãy } (v_n) \text{ là cấp số nhân với công bội } q = \frac{1}{3}.$	0.75
2 (1.0 điểm)	Dãy (v_n) là cấp số nhân với $q = \frac{1}{3}$ và $v_1 = u_1^2 - 1 = 1$ nên $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.	0.5
	$\Rightarrow u_n^2 - 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \Rightarrow u_n = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 1}.$	0.5
3 (0.5 điểm)	Áp dụng bất Bunhiacopxki ta có: $(u_1 + u_2 + \dots + u_n)^2 \leq (1 + 1 + \dots + 1)(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)$ $\Leftrightarrow (u_1 + u_2 + \dots + u_n)^2 \leq n(u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2)$. Mà $u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^0 + 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + 1 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 1 = n + \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$.	0.25
	Do đó $(u_1 + u_2 + \dots + u_n)^2 \leq n \left[n + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \right] < n(n+2) < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ $\Rightarrow u_1 + u_2 + \dots + u_n < n+1$.	0.25

Bài V. (6.0 điểm)

Câu	Nội dung	Điểm
Hình vẽ		
1 (Ý 1) (2.5 điểm)	$C'G \cap A'B' = K \Rightarrow K$ là trung điểm của $A'B' \Rightarrow A'IC'K$ là hình bình hành $\Rightarrow A'I \parallel C'K$	1.0
	$ADIK$ là hình bình hành ($AD \parallel IK, AD = IK$) $\Rightarrow DI \parallel AK$	0.5
	$\left. \begin{array}{l} A'I \parallel C'K, DI \parallel AK \\ (AC'G): C'K \cap AK = K \\ (A'DI): A'I \cap DI = I \end{array} \right\} \Rightarrow (AC'G) \parallel (A'DI).$	1.0
1 (Ý 2) (2.5 điểm)	$AC \cap BD = O \Rightarrow O$ là trung điểm của $AC \Rightarrow \frac{CE}{CO} = \frac{2}{3} \Rightarrow E$ là trọng tâm $\triangle BCD$	0.5
	$\Rightarrow$ nếu $BE \cap CD = J$ thì J là trung điểm CD và $\frac{JE}{JB} = \frac{1}{3}$.	0.5
	Chứng minh tương tự: F là trọng tâm $\triangle CDD'$ $\Rightarrow D', F, J$ thẳng hàng và $\frac{JF}{JD'} = \frac{1}{3}$	0.5
	$\triangle BDD': \frac{JE}{JB} = \frac{JF}{JD'} = \frac{1}{3} \Rightarrow EF \parallel BD'$.	0.5
2 (1.0 điểm)	(Cách 1) Chứng minh: $\triangle ABC$, trung tuyến AM. Giả sử đường thẳng d cắt các tia AB, AC, AM lần lượt ở D, E, F. Khi đó: $\frac{AB}{AD} + \frac{AC}{AE} = 2 \frac{AM}{AF}$ (*). . Vẽ BH, CI song song với d với $H, I \in AM$. . Theo định lý Ta let ta có: $\frac{AB}{AD} = \frac{AH}{AF}, \frac{AC}{AE} = \frac{AI}{AF} \Rightarrow \frac{AB}{AD} + \frac{AC}{AE} = \frac{AH + AI}{AF}$. Mà $\triangle BHM = \triangle CIM$ (g.c.g) $\Rightarrow MH = MI$ $\Rightarrow AH + AI = 2AM \Rightarrow \frac{AB}{AD} + \frac{AC}{AE} = 2 \frac{AM}{AF}.$	
		
		0.25


$$MN \cap AK = H \Rightarrow P; Q; H \text{ thẳng hàng.}$$

Gọi L là trung điểm của $C'G$ và $AL \cap PH = R$.

Áp dụng (*): $\Delta AA'B'$, trung tuyến AK : $\frac{AA'}{AM} + \frac{AB'}{AN} = 2 \frac{AK}{AH} \Rightarrow \frac{AK}{AH} = \frac{1}{2} \left(\frac{AA'}{AM} + \frac{AB'}{AN} \right)$ (1)

Áp dụng (*): $\Delta AGC'$, trung tuyến AL : $\frac{AG}{AQ} + \frac{AC'}{AP} = 2 \frac{AL}{AR} \Rightarrow \frac{AL}{AR} = \frac{1}{2} \left(\frac{AG}{AQ} + \frac{AC'}{AP} \right)$ (2)

Áp dụng (*): ΔAKL , trung tuyến AG : $\frac{AK}{AH} + \frac{AL}{AR} = 2 \frac{AG}{AO}$ (3)

$$\text{Tür (1),(2),(3): } \frac{1}{2} \left(\frac{AA'}{AM} + \frac{AB'}{AN} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{AG}{AO} + \frac{AC'}{AP} \right) = 2 \frac{AG}{AO} \Leftrightarrow \frac{AA'}{AM} + \frac{AB'}{AN} + \frac{AC'}{AP} = 3 \frac{AG}{AO} = 6$$

Áp dụng bất Côsi: $\frac{AA'}{AM} + \frac{AB'}{AN} + \frac{AC'}{AP} \geq 3 \cdot \sqrt{\frac{AA'}{AM} \cdot \frac{AB'}{AN} \cdot \frac{AC'}{AP}} \Rightarrow \frac{AA'}{AM} \cdot \frac{AB'}{AN} \cdot \frac{AC'}{AP} \leq 8$.

Vậy giá trị lớn nhất của $T = \frac{AA'}{AM} \cdot \frac{AB'}{AN} \cdot \frac{AC'}{AP}$ bằng 8 khi M, N, P lần lượt là trung điểm của $AA', AB', AC' \Rightarrow (\alpha) // (A'B'C')$.

(Cách 2)

. Chứng minh: Nếu A, B, C, G đồng phẳng thì với mọi điểm O bất kỳ, ta có

$$\overrightarrow{OG} = x.\overrightarrow{OA} + y.\overrightarrow{OB} + z.\overrightarrow{OC} \text{ với } x + y + z = 1.$$

• Ta có: G là trọng tâm của $\triangle A'B'C'$ nên $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} = 3\overrightarrow{AG}$.

$$\Rightarrow \frac{AA'}{AM} \cdot \overrightarrow{AM} + \frac{AB'}{AN} \cdot \overrightarrow{AN} + \frac{AC'}{AP} \cdot \overrightarrow{AP} = 3 \cdot \frac{AG}{AO} \cdot \overrightarrow{AQ}.$$

. Vì M, N, P, Q đồng phẳng nên $\overrightarrow{AQ} = x\overrightarrow{AM} + y\overrightarrow{AN} + z\overrightarrow{AP}$ với $x + y + z = 1$

$$\Rightarrow \frac{AA'}{AM} + \frac{AB'}{AN} + \frac{AC'}{AP} = 3 \cdot \frac{AG}{AO} = 6 \Rightarrow 6 \geq 3\sqrt[3]{\frac{AA'}{AM} \cdot \frac{AB'}{AN} \cdot \frac{AC'}{AP}} \Rightarrow \frac{AA'}{AM} \cdot \frac{AB'}{AN} \cdot \frac{AC'}{AP} \leq 8.$$

. Vậy GTLN của T bằng 8 khi $(\alpha) \parallel (A'B'C')$.

Ghi chú: Thí sinh có lời giải theo phương pháp khác, nếu đúng vẫn cho điểm tối đa (GK tự chia điểm thành phần).