SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI

TRƯỜNG THPT QUANG MINH

------ -----

SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

KHAI THÁC TÍNH CHẤT HÀM ĐẶC TRƯNG ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

Lĩnh vực/môn : Toán

Cấp học : THPT

Tác giả : Bùi Khánh Phương

Đơn vị công tác : Trường THPT Quang Minh

Chức vụ : Giáo viên

Năm học 2022 - 2023

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM

Độc lập – Tự do – Hạnh phúc

ĐƠN YÊU CẦU CÔNG NHẬN SÁNG KIẾN

Kính gửi: *Hội đồng chấm sáng kiến kinh nghiệm Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội.*

Họ và tên	Ngày, tháng, năm sinh	Nơi công tác	Chức danh	Trình độ chuyên môn	Tên sáng kiến
Bùi Khánh Phương	23/07/1981	Trường THPT Quang Minh	Giáo viên	Thạc sỹ	Khai thác tính chất hàm đặc trưng để giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình đại số

- Lĩnh vực áp dụng sáng kiến: Toán học.

  Sáng kiến đưa ra cách sử dụng tính chất hàm đặc trưng để giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình đại số.
- Ngày sáng kiến được áp dụng lần đầu 22 tháng 10 năm 2022.
- Bản chất của sáng kiến: sáng kiến giải quyết được các vấn đề sau:

  Một là: Điều tra thực trạng việc dạy và học của giáo viên và học sinh khi giảng dạy nội dung kiến thức nói trong đề tài.

  Hai là: Hệ thống lại kiến thức lý thuyết về hàm số có liên quan đến đề tài.

  Ba là: Giới thiệu được các dạng toán thường gặp khi sử dụng tính chất hàm đặc trưng để giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình đại số.

  Bốn là: Giới thiệu được 13 ví dụ có lời giải về phương trình, 11 ví dụ có lời giải về bất phương trình và 9 ví dụ có lời giải về hệ phương trình đại số khi sử dụng tính chất hàm đặc trưng để giải.

  Năm là: Đánh giá được tính khả thi của đề tài sau khi áp dụng (có số liệu kèm theo).
- Điều kiện cần thiết để áp dụng sáng kiến: cho mọi đối tượng là học sinh lớp 12
- Danh sách những người tham gia áp dụng sáng kiến lần đầu:

STT	Họ và tên	Ngày, tháng, năm sinh	Nơi công tác	Chức danh	Trình độ chuyên môn	Nội dung công việc hỗ trợ
1	Đàm Thị Thảo	10/5/1985	Trường THPT Quang Minh	Giáo viên	Thạc sỹ	Áp dụng sáng kiến với lớp 12A5
2	Đặng Thị Phương Thơm	1/12/1980	Trường THPT Quang Minh	Giáo viên	Thạc sỹ	Áp dụng sáng kiến với 2 lớp 12A1 và 12A2

Tôi xin cam đoan trước mọi thông tin nêu trong đơn là trung thực, đúng sự thật và hoàn toàn chịu trách nhiệm trước pháp luật.

Quang Minh, ngày 10 tháng 3 năm 2023
Người nộp đơn

Bùi Khánh Phương

Mẫu 2

TRƯỜNG THPT QUANG MINH
HỘI ĐỒNG SÁNG KIẾN

CỘNG HÒA XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM
Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

PHIẾU NHẬN XÉT ĐÁNH GIÁ

Họ tên tác giả: Bùi Khánh Phương

Tên đề tài: Khai thác tính chất hai đặc trưng để giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình đại số .... Lĩnh vực: Toán học

STT	Tiêu chuẩn	Điểm tối đa
1	**Sáng kiến có tính mới**	25
1.1	Hoàn toàn mới, được áp dụng đầu tiên	
1.2	Có cải tiến so với giải pháp trước đây với mức độ khá	
1.3	Có cải tiến so với giải pháp trước đây với mức độ trung bình	
1.4	Không có tính mới hoặc sao chép từ các giải pháp đã có trước đây	
Nhận xét: Sáng kiến mới, không trùng lặp với các sáng kiến cũ, được áp dụng lần đầu		
2	**Sáng kiến có tính áp dụng**	25
2.1	Có khả năng áp dụng trong phạm vi toàn ngành hoặc rộng hơn	
2.2	Có khả năng áp dụng trong đơn vị và có thể nhân ra một số đơn vị có cùng điều kiện	
2.3	Có khả năng áp dụng trong đơn vị	
2.4	Không có khả năng áp dụng trong đơn vị	
Nhận xét: Sáng kiến có khả năng áp dụng trong toàn ngành		
3	**Sáng kiến có tính hiệu quả**	25
3.1	Có hiệu quả, đem lại lợi ích kinh tế - xã hội, có tính lan tỏa	
3.2	Có hiệu quả, đem lại lợi ích kinh tế - xã hội	
3.3	Có hiệu quả, lợi ích phù hợp với mức độ phù hợp tại đơn vị	
3.4	Không có hiệu quả cụ thể	
Nhận xét: Sáng kiến có hiệu quả, có tính lan tỏa		
4	**Điểm trình bày**	10
4.1	Trình bày khoa học, hợp lý	
4.2	Trình bày chưa khoa học, chưa hợp lý	
Nhận xét: Sáng kiến trình bày khoa học, hợp lý, có tính áp dụng trong việc dạy và học		
Tổng cộng: 85	**Đánh giá:** ☒ 85 Đạt (*≥70 điểm*) ☐ Không đạt	

CHỦ TỊCH HỘI ĐỒNG SÁNG KIẾN CƠ SỞ

TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG QUANG MINH

HIỆU TRƯỞNG

Đào Thị Phương Lan

MỤC LỤC

MỞ ĐẦU

1. Lý do chọn đề tài

Toán học, trong suy nghĩ của nhiều người, nhiều thế hệ học trò là môn học khó và hết sức khô khan. Với những người có tư duy toán học tốt thì việc học môn học này có phần đơn giản hơn một chút, còn với số đông người khác, đây là việc tương đối phức tạp. Tuy nhiên, toán học là bộ môn khoa học tự nhiên có vai trò rất quan trọng trong học tập cũng như trong đời sống. Môn toán cung cấp cho học sinh hệ thống kiến thức phổ thông, cơ bản và thiết thực không chỉ giúp ích trong cuộc sống mà còn hỗ trợ cho việc học tập các môn khác như hóa học, vật lý, sinh học, địa lý… Bên cạnh đó, nó còn rèn cho học sinh óc tư duy sáng tạo và khả năng trực quan nhanh nhạy; hình thành cho các em những phẩm chất cần thiết như cẩn thận, kiên trì, trung thực, tỉ mỉ và yêu thích khoa học. Tuy nhiên có rất nhiều học sinh sợ học môn toán bởi những đặc trưng của bộ môn khoa học tự nhiên đòi hỏi người học phải có khả năng tư duy cao, các kiến thức có sự liên kết và kế thừa từ thấp đến cao.

Trong chương trình Giải tích 12, nội dung kiến thức về hàm số nằm ở chương I. Đây là nội dung rất quan trọng trong chương trình toán 12, việc vận dụng các kiến thức về hàm số để giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình đại số thường xuất hiện trong các đề thi học sinh giỏi lớp 12 ở các Sở, các đề thi tốt nghiệp, hay đề thi Đại học.

Trong một vài năm gần đây, việc sử dụng hàm đặc trưng để giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình trong các đề thi đại học, cao đẳng và trong các đề thi học sinh giỏi được sử dụng khá phổ biến. Nhằm giúp học sinh nắm vững phương pháp sử dụng tính chất hàm đặc trưng trong giải toán và kết hợp phương pháp này với các phương pháp khác, linh hoạt trong các cách xử lí để giải quyết các dạng toán. Tôi đã chọn đề tài của sáng kiến kinh nghiệm là ***"Khai thác tính chất hàm đặc trưng để giải phương trình, bất phương trình và hệ bất phương trình đại số".***

2. Mục đích nghiên cứu.

- Nghiên cứu tính hiệu quả và khả thi của đề tài trong việc giải quyết các bài toán về giải phương trình, bất phương trình và hệ bất phương trình trong quá trình dạy toán lớp 12.

- Giúp học sinh có một phương pháp hữu hiệu khi giải các bài toán về phương trình, bất phương trình và hệ bất phương trình, từ đó hình thành cho học sinh các kỹ năng biến đổi, khả năng so sánh, phân tích và tổng hợp tốt, đồng thời có một tư duy sáng tạo, linh hoạt khi giải toán.

- Đóng góp một hệ thống các bài toán phương trình, bất phương trình và hệ bất phương trình trong đề thi học sinh giỏi, đề thi Đại học, Cao đẳng của các trường trong cả nước.

- Góp phần gây hứng thú cho học sinh khi giải quyết các bài toán giải phương trình, bất phương trình và hệ bất phương trình. Từ đó giúp học sinh có hứng thú học tập hơn, tự tin trong việc giải các bài tập toán.

- Nghiên cứu của đề tài giúp nâng cao nghiệp vụ chuyên môn của bản thân, rút kinh nghiệm trong giảng dạy và là tư liệu tra cứu cho học sinh cũng như giáo viên khi học và dạy nội dung này.

3. Đối tượng nghiên cứu và phạm vi nghiêm cứu.

a) Đối tượng nghiên cứu.

- Học sinh lớp chọn 12 ban Cơ bản và đặc biệt đội tuyển học sinh giỏi, học sinh thi Đại học, Cao đẳng.

- Kiến thức Giải tích 12 chương

b) Phạm vi nghiên cứu.

- Kiến thức về hàm số, phương trình, bất phương trình và hệ bất phương trình.

- Sách giáo khoa, sách giáo viên và một số sách tham khảo.

- Đề thi đại học, học sinh giỏi của các trường trên cả nước và một số tài liệu trên Internet

4. Phương pháp nghiên cứu.

Để thực hiện mục đích và nhiệm vụ của đề tài, trong quá trình nghiên cứu tôi đã sử dụng các nhóm phương pháp sau:

a) Nghiên cứu tài liệu.

- Đọc tài liệu, sách báo, tạp chí giáo dục, các đề thi học sinh giỏi của các trường trên cả nước.

- Nghiên cứu các bài làm của học sinh.

- Xây dựng hệ thống bài tập dựa trên các nghiên cứu của đề tài.

b) Nghiên cứu thực tế.

- Phương pháp đàm thoại phỏng vấn: dự giờ, trao đổi ý kiến với đồng nghiệp.

- Phương pháp quan sát (công việc giải bài tập của học sinh)

- Phương pháp điều tra: thăm dò ý kiến của GV và HS khi học nội dung này.

- Phương pháp thực nghiệm: tổ chức và tiến hành thực nghiệm sư phạm để kiểm tra tính khả thi của đề tài. Đưa vào giảng dạy lớp chọn 12A1, 12A2, 12A5 của trường khi học và ôn tập nội dung này. Giảng dạy đội tuyển học sinh giỏi lớp 12.

5. Kế hoạch nghiên cứu.

- Nghiên cứu nội dung phần hàm số, phương trình, bất phương trình và hệ phương trình trong sách giáo khoa, sách giáo viên và các tài liệu tham khảo.

- Nghiên cứu đề thi đại học và đề thi học sinh giỏi lớp 12 của các trường THPT trên cả nước.

- Nghiên cứu việc lĩnh hội kiến thức của học sinh trên lớp, áp dụng đề tài cho học sinh vào các buổi chuyên đề, các buổi ôn luyện học sinh giỏi.
- Có đánh giá sự tiến bộ của học sinh khi áp dụng đề tài đối với học sinh trước và sau khi áp dụng, giữa các lớp được phân công giảng dạy từ tháng 9 năm 2022 đến tháng 2 năm 2023.

6. Những đóng góp của đề tài.
- Điều tra được thực trạng dạy- học nội dung hàm số tại trường THPT Quang Minh trong 3 năm trở lại đây.
- Đề xuất được phương pháp giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình bằng cách sử dụng tính chất hàm đặc trưng.
- Phân dạng và nêu các bài toán thường gặp khi giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình.
- Xây dựng và hệ thống được các bài toán giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình có phân tích tỉ mỉ từng trường hợp khi giải.

7. Cấu trúc của đề tài.

Ngoài phần mở đầu, kết luận, danh mục tài liệu tham khảo và các minh chứng, đề tài gồm 3 chương:

Chương 1: Cơ sở lý luận và thực tiễn

Chương 2: Khai thác tính chất đặc trưng của hàm số để giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình đại số.

Chương 3: Thực nghiệm sự phạm.

Chương I
CƠ SỞ LÝ LUẬN VÀ THỰC TIỄN

I. Cơ sở lý luận.

Môn Toán cũng như những môn học khác cung cấp những tri thức khoa học, những nhận thức về thế giới xung quanh nhằm phát triển năng lực nhận thức, hoạt động tư duy và bồi dưỡng tình cảm đạo đức tốt đẹp của con người.

Môn Toán có khả năng giáo dục rất lớn trong việc rèn luyện phương pháp suy nghĩ, phương pháp suy luận logic, thao tác tư duy cần thiết để con người phát triển tư duy toàn diện, hình thành nhân cách tốt đẹp cho người lao động trong thời đại mới.

Dựa trên nguyên tắc của quá trình nhận thức của con người đi từ "cái sai đến cái gần đúng rồi mới đến khái niệm đúng", các nguyên tắc dạy học và đặc điểm quá trình nhận thức của học sinh.

Khơi dạy và phát triển năng lực tự học, nhằm hình thành cho học sinh tư duy tích cực, độc lập sáng tạo, nâng cao năng lực phát hiện và giải quyết vấn đề, rèn luyện kỹ năng vận dụng kiến thức vào thực tiễn; tác động tới tình cảm, đem lại niềm vui, hứng thú học tập cho học sinh.

2. Thực trạng vấn đề trước khí áp dụng của đề tài.

Với điểm đầu vào thấp hơn so với một số trường trong khu vực, đó cũng là một khó khăn không nhỏ với học sinh của tôi khi tiếp cận các bài toán vận dụng về giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình. Có nhiều bài toán các em cảm thấy lúng túng và không biết xử lý thế nào.

II. Cơ sở lý thuyết

1. **Một số kết quả:**

- Nếu hàm số y = f(x) luôn đồng biến (hoặc nghịch biến) và liên tục trên tập D thì số nghiệm trên D của phương trình $f\left(x\right)=a$ không nhiều hơn một nghiệm và

$$\forall u,v\in D:\ \text{f(u) = f(v)} \Leftrightarrow \text{u = v}.$$

- Nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ luôn đồng biến và liên tục trên tập D thì

$$\forall u,v\in D:\ \text{f(u) < f(v)} \Leftrightarrow \text{u < v}.$$

- Nếu hàm số $y=f\left(x\right)$ luôn nghịch biến và liên tục trên D thì

$$\forall u,v\in D:\ \text{f(u) < f(v)} \Leftrightarrow \text{u > v}.$$

2. **Phương pháp giải một số dạng.**

Dạng 1: Phương trình đã được đưa về dạng: f(u) = f(v) trong đó $u=u\left(x\right),\ v=v\left(x\right)$.

Phương pháp:

Bước 1: Biến đổi phương trình về dạng $f(u)=f(v),\ u,v\in D$

Bước 2: Xét hàm số $y=f(t)$ trên miền xác định D.

- Tính y' và xét dấu y'.
- Kết luận hàm số $y=f(t)$ là hàm đơn điệu trên D.

Bước 3: Kết luận.

- Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $u=v$.
- Giải phương trình $u=v$
- Kết luận nghiệm của phương trình đã cho.

Dạng 2: Bất phương trình đã cho được đưa về dạng: $f(u)<f(v)$ trong đó $u=u(x),\ v=v(x)$.

Phương pháp:

Bước 1: Biến đổi bất phương trình về dạng: $f(u)<f(v),\ u,v\in D$

Bước 2 : Xét hàm số y = f(t) là hàm đơn điệu trên D.

* Tính y' và xét dấu y'.

* Kết luận hàm số y = f(t) là hàm đơn điệu trên D.

* Nếu f(t) đơn điệu tăng thì : $f(u)<f(v)\Leftrightarrow u<v.$

* Nếu f(t) đơn điệu giảm thì : $f(u)<f(v)\Leftrightarrow u>v.$

Bước 3 : Kết luận nghiệm của bất phương trình đã cho.

Tổng kết chương 1

Trong chương này, tác giả đã hệ thống lại các kiến thức cơ bản về tính đồng biến, nghịch biến của hàm số. Bên cạnh đó, tác giả đưa ra các bước giải phương trình và bất phương trình bằng cách sử dụng tính chất hàm đặc trưng.

Chương II

KHAI THÁC TÍNH CHẤT HÀM ĐẶC TRƯNG ĐỂ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

I. Khai thác tính chất hàm đặc trưng để giải phương trình.

Để giải một phương trình ta có nhiều cách giải khác nhau, mỗi cách giải đều đòi hỏi nhiều kiến thức và sự vận dụng linh hoạt trong đó. Ta xét ví dụ sau:

<u>Ví dụ 1:</u>

Giải phương trình: $2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16} \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $\begin{cases} 2x+4 \ge 0 \\ 2-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le x \le 2$ (*).

$$2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16} \Leftrightarrow 4(2x+4)+16(2-x)+16\sqrt{(2x+4)(2-x)}=9x^2+16$$

$$\Leftrightarrow 48-8x+16\sqrt{2(4-x^2)}=9x^2+16 \quad (1)$$

Với bài toán này, tôi xin nêu ra một số cách giải sau:

<u>Cách giải 1:</u>

(1) $\Leftrightarrow 16\sqrt{2(4-x^2)}-8x=9x^2-32 \Leftrightarrow 8(2\sqrt{2(4-x^2)}-x)=9x^2-32 \quad$ (1a)

Xét trường 1:

$$2\sqrt{2(4-x^2)}+x=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2(4-x^2)}=-x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0 \\ x=\pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Thay $x=-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ vào (1a) không thỏa mãn.

Xét trường 2: $2\sqrt{2(4-x^2)}+x \ne 0 \Leftrightarrow x \ne -\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

(1a) $\Leftrightarrow \dfrac{8(2\sqrt{2(4-x^2}-x)(2\sqrt{2(4-x^2}+x)}{2\sqrt{2(4-x^2}+x}=9x^2-32$

$$\Leftrightarrow \frac{8(8(4-x^2)-x^2}{2\sqrt{2(4-x^2}+x} = 9x^2-32 \Leftrightarrow \frac{8(32-9x^2)}{2\sqrt{2(4-x^2}+x} = 9x^2-32$$

$$\Leftrightarrow (9x^2-32)[1+\frac{8}{2\sqrt{2(4-x^2}+x}] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9x^2-32=0 \\ 1+\dfrac{8}{2\sqrt{2(4-x^2}+x} = 0 \end{array}\right.$$

Xét phương trình $9x^2-32=0 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

Kết hợp điều kiện $x \neq -\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ ta được $x = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ thỏa mãn.

Xét phương trình

$$1+\frac{8}{2\sqrt{2(4-x^2)}+x} = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2(4-x^2)}+x+8=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2(4-x^2)} = -x-8$$

Vì $-2 \le x \le 2$ nên phương trình $2\sqrt{2(4-x^2)} = -x-8$ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

Phân tích:

Ở cách giải này, khắc sâu được cho học sinh khi dùng phương pháp nhân liên hợp để giải bất phương trình vô tỷ. Rõ ràng là theo cách giải này, học sinh nào không xét trường hợp biểu thức liên hợp bằng không là không hoàn chỉnh.

Cách giải 2:

$$\Leftrightarrow 16\sqrt{2(4-x^2)} = 9x^2+8x-32$$

(1) $$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2+8x-32 \ge 0 \\ 512(4-x^2) = (9x^2+8x-32)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \le \dfrac{-4-4\sqrt{19}}{9} \\ x \ge \dfrac{-4+4\sqrt{19}}{9} \end{array}\right. \quad (**) \\ 81x^4-144x^2+512x-1024=0 \quad (1b) \end{cases}$$

Giải phương ttrình (1b)

(1b) $$\Leftrightarrow 81(x^4-\frac{1024}{81})-144x(x^2-\frac{32}{9}) = 0 \Leftrightarrow (x^2-\frac{32}{9})\left[81(x^2+\frac{32}{9})-144x\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ (vì } 81(x^2+\frac{32}{9}) - 144x = 81x^2 - 144x + 288 = (9x-8)^2 + 224 > 0, \forall x)$$

Với $x = \pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$ kết hợp với điều kiện (**) ta được $x = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ (thỏa mãn điều kiện (*)).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

- *Phân tích:*

Ở cách giải này, đòi hỏi học sinh phải có kỹ năng phân tích thành tích các nhân tử khi gặp phương trình bậc cao cũng như giải phương trình vô tỷ bằng phép biến đổi tương đương. Điều này nhiều khi sẽ là khó khăn với một số học sinh.

Cách giải 3:

$$\Leftrightarrow 16\sqrt{2(4-x^2)} = 9x^2 + 8x - 32 \Leftrightarrow 4(8-2x^2) + 16\sqrt{8-2x^2} + 16 = x^2 + 8x + 16$$

(1)
$$\Leftrightarrow (2\sqrt{8-2x^2}+4)^2 = (x+4)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2\sqrt{8-2x^2} = -x-8 & (2) \\ 2\sqrt{8-2x^2} = x & (3) \end{array}\right.$$

Phương trình (2) vô nghiệm vì $-2 \le x \le 2 \Rightarrow -x-8 < 0 \Rightarrow$ VT (2) $\ge 0 >$ VP(2).

Giải phương trình (3):

$$2\sqrt{8-2x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x = \pm\frac{4\sqrt{2}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ (thoản mãn điều kiện (*))}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

- Phân tích:

Ở cách giải này, chúng ta đã linh hoạt đưa được phương trình đã cho về dạng tổng bình phương ở hai vế bằng cách thêm bớt để xuất hiện hằng đẳng thức. Đó cũng là một ý tưởng rất hay khi giải quyết bài toán này. Ngoài ra bằng cách thêm bớt ta có thể giải bài toán như sau:

Cách giải 4:

$$(1) \Leftrightarrow 16\sqrt{-2x^2+8} = 9x^2+8x-32 \Leftrightarrow 4(-2x^2+8)+16\sqrt{-2x^2+8} = x^2+8x$$

$$\Leftrightarrow 4(-2x^2+8)+16\sqrt{-2x^2+8} = 4(\frac{x}{2})^2+16\frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4(\sqrt{-2x^2+8})^2+16\sqrt{-2x^2+8} = 4(\frac{x}{2})^2+16\frac{x}{2} \quad (1c)$$

Từ điều kiện $-2 \le x \le 2$ ta có $\frac{x}{2} \in [-1;1]$

Xét hàm số $f(t) = 4t^2+16t$ với $t \in [-1;+\infty)$

$f'(t) = 8t+16$; $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -2 \notin [-1;+\infty)$

Ta có bảng biến thiên :

t	- ∞	-2	-1		+∞
f'(t)		0			
f(t)				↗	

Từ bảng biến thiên ta có hàm số f(t) luôn đồng biến trên $[-1;+\infty)$

Mặt khác f(t) là hàm số liên tục trên $[-1;+\infty)$.

Do đó phương trình:

$$(1c) \Leftrightarrow f(\sqrt{-2x^2+8}) = f(\frac{x}{2}) \Leftrightarrow \sqrt{-2x^2+8} = \frac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} \ge 0 \\ -2x^2+8 = \frac{x^2}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x = \pm\frac{4\sqrt{2}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

(thỏa mãn điều kiện (*)).

Phân tích :

Cách giải bài toán này sẽ đơn giản hơn rất nhiều nếu ta biết cách sử dụng phương pháp hàm đặc trưng để giải.

$$(1) \Leftrightarrow 8.\sqrt{32-8x^2} = 9x^2+8x-32 \Leftrightarrow (\sqrt{32-8x^2})^2+8.\sqrt{32-8x^2} = x^2+8x$$

Và khi đó sẽ dẫn đến việc xét hàm đặc trưng $f(t) = t^2+8t$ với $t \in [-2;+\infty)$

Hoặc, nếu để ý rằng từ điều kiện $-2 \le x \le 2$ ta có $\frac{x}{2} \in [-1;1]$ và $0 \le \sqrt{-2x^2+8} \le 2\sqrt{2}$ thì có thể xét hàm số ở phương trình (1c) là $f(t) = 4t^2 + 6t;\ t \in \left[-1; 2\sqrt{2}\right]$, nhưng thật ra ta chỉ cần xét hàm số f(t) với t xác đinh như ở cách giải 4.

Qua bốn cách giải trên ta nhận thấy, việc sử dụng tính chất đặc trưng để giải bài toán làm cho việc giải bài toán trở lên đơn giản gắn gọn hơn. Qua đó tôi xin mạnh dạn nêu ra một số dạng toán giải phương trình bằng cách sử dụng tính chất hàm đặc trưng.

Một số dạng phương trình giải bằng cách sử dụng tính chất của hàm đặc trưng.

Dạng 1 : *Khi gặp phương trình dạng* $ax^2 + bx + c = n.\sqrt{ex+d}$ *mà có thể giải bằng phương pháp hàm đặc trưng thì khi đó ta sẽ đưa phương trình đã cho về dạng*

$$ax^2 + bx + c = n.\sqrt{ex+d} \Leftrightarrow m.(px+u)^2 + n.(px+u) = m.(ex+d) + n.\sqrt{ex+d}$$

Xét hàm đặc trưng $f(t) = mt^2 + nt$ *luôn đơn điệu trên miền cần xét. Khi đó công việc tiếp theo là phải xác định được các hệ số ở trên bằng cách đồng nhất thức để tìm các hệ số.*

Dạng 2 : *Khi gặp phương trình dạng* $ax^3 + bx^2 + cx + d = n.\sqrt[3]{ex+v}$ (1) *mà giải được bằng phương pháp hàm đặc trưng thì cách giải sẽ là:*

Bước 1: Xác định các hệ số m, p, u sao cho

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = n.\sqrt[3]{ex+v} \Leftrightarrow m.(px+u)^3 + n.(px+u) = m.(ex+v) + n.\sqrt[3]{(ex+v)}$$

Bước 2: Xét tính đơn điệu của hàm đặc trưng f(t) = mt³ +nt, chứng minh được hàm số f(t) luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên miền cần xác định

Khi đó ta có phương trình

(1) $\Leftrightarrow f(px+u) = f(\sqrt[3]{ex+v}) \Leftrightarrow px + u = \sqrt[3]{ex+v}$ (2)

Bước 3: Tìm cách giải cho phương trình (2)

Dạng 3: *Khi gặp phương trình dạng* $ax^3 + bx^2 + cx + d = (e_1x + v_1).\sqrt{ex+v}$ (1) *mà giải được bằng phương pháp dùng hàm đặc trưng thì cách giải đó sẽ là:*

Bước 1: Xác định các hệ số m, n, p u sao cho

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (e_1x + v_1).\sqrt{ex+v}$$
$$\Leftrightarrow m(px+u)^3 + n.(px+u) = m.(\sqrt{ex+v})^3 + n.\sqrt{ex+v}$$

Bước 2: Xác định tính đơn điệu của hàm đặc trưng f(t) = mt³ +nt, chứng minh hàm số f(t) luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên miền xác định. Khi đó ta có phương trình

$(1) \Leftrightarrow f(px+u) = f(\sqrt{ex+v}) \Leftrightarrow px+u = \sqrt{ex+v}$ (2)

Bước 3: Tìm cách giải cho phương trình (2).

Dạng 4: *Khi gặp phương trình có dạng* $x^3 - b = a.\sqrt[3]{ax+b}$ (1) *với a > 0 (x là ẩn) ta đưa được về hàm đặc trưng để giải quyết bằng cách như sau:*

$(1) \Leftrightarrow x^3 + ax = ax + b + a.\sqrt[3]{ax+b} \Leftrightarrow x^3 + ax = (\sqrt[3]{ax+b})^3 + \sqrt[3]{ax+b}$

Với hàm đặc trưng f(t) = t^3*+ at, phương trình đã cho được biến đổi về phương trình* $x = \sqrt[3]{ax+b} \Leftrightarrow x^3 = ax+b$

Một số ví dụ sau sẽ minh họa cho các dạng trên.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt[3]{2x+1}-3} = \dfrac{1}{x+2} \quad (x \in \mathbb{R})$

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq -1 \\ x \neq 13 \end{cases}$ (*)

Phương trình đã cho tương đương với

$(x+2)\left(\sqrt{x+1}-2\right) = \sqrt[3]{2x+1}-3 \Leftrightarrow (x+1)\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1} = 2x+1+\sqrt[3]{2x+1}$ (1)

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$, với $t \in \mathbb{R}$;

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $f(t)$ liên tục trên $\mathbb{R}$

Do đó phương trình (1) $\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+1}\right) = f\left(\sqrt[3]{2x+1}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt[3]{2x+1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2} \\ (x+1)^3 = (2x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2} \\ x^3 - x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \quad \text{(thỏa mãn điều kiện (*))}.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ và $x = 0$.

Phân tích :

Việc giúp học sinh biến đổi phương trình để nhận ra hàm đặc trưng là một khâu quan trọng trong ví dụ này. Việc nhân chéo và biến đổi mỗi vế của phương trình cần được thực hiện một cách khéo léo để xuất hiện hàm đặc trưng dạng $f(t) = t^3 + t$

<u>Ví dụ 3 :</u> Giải phương trình: $8x^3 - 36x^2 + 53x - 25 = \sqrt[3]{3x-5}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Lời giải tham khảo

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$8x^3 - 36x^2 + 53x - 25 = \sqrt[3]{3x-5} \Leftrightarrow (2x-3)^3 + (2x-3) = (\sqrt[3]{3x-5})^3 + \sqrt[3]{3x-5}$ (1)

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ với $t \in \mathbb{R}$

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác f(t) là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

Do đó phương trình

$f(2x-3) = f(\sqrt[3]{3x-5}) \Leftrightarrow 2x - 3 = \sqrt[3]{3x-5} \Leftrightarrow (2x-3)^3 = 3x - 5$

$\Leftrightarrow 8x^3 - 36x^2 + 51x - 22 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(8x^2 - 20x + 11) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{2; \dfrac{5 \pm \sqrt{3}}{4}\right\}$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $T = \left\{2; \dfrac{5 \pm \sqrt{3}}{4}\right\}$

Phân tích :

Qua ví dụ trên giáo viên giúp học sinh nhận ra được các bước giải quyết như sau:

+) Đưa phương trình về dạng f(g(x)) = f(h(x))

+) Xét hàm đặc trưng $f(t) = m.t^3 + n.t$.

+) Đồng nhất sao cho biểu thức ở hai về phải có dạng $m.(\sqrt[3]{3x-5})^3 + n.\sqrt[3]{3x-5}$ *và so sánh vế phải đó với vế phải của phương trình đã cho nên ta chọn n =1.*

+) Từ đó đưa phương trình đã cho có dạng

+) Tìm các hệ số m, p, u.

Ví dụ 4: Giải phương trình: $4x^3 + x - (x+1)\sqrt{2x+1} = 0$ $(x \in \mathbb{R})$.

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x \ge -\dfrac{1}{2}$ (*).

$$4x^3 + x - (x+1)\sqrt{2x+1} = 0 \Leftrightarrow 8x^3 + 2x = 2(x+1)\sqrt{2x+1}$$
$$\Leftrightarrow (2x)^3 + (2x) = [(2x+1)+1]\sqrt{2x+1}$$
$$\Leftrightarrow (2x)^3 + (2x) = (\sqrt{2x+1})^3 + \sqrt{2x+1} \quad (1)$$

Xét hàm số f(t) = t^3 + t với $t \in \mathbb{R}$

Ta có f'(t) = $3t^2$ + 1 > 0, $\forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác f(t) là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

Do đó phương trình

$$(1) \Leftrightarrow f(2x) = f(\sqrt{x+1}) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \ge 0 \\ 4x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$$ (thỏa mãn điều kiện (*)).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $T = \left\{ \dfrac{1+\sqrt{5}}{4} \right\}$

Phân tích:

Biểu thức ở trong căn bậc hai là 2x +1, vì vậy ta sẽ biến đổi để sao cho một vế của phương trình biểu diễn được qua 2x + 1.

Cách làm nhân cả hai vế của phương trình đã cho với 2, khi đó ta có 2(x+1) = (2x + 1) + 1,

Ví dụ 5: Giải phương trình: $x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = (3x+2)\sqrt{3x+1}$ $(x \in \mathbb{R})$

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x \ge -\frac{1}{3}$ (*).

$x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = (3x+2)\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow (x+1)^3 + (x+1) = (\sqrt{3x+1})^3 + \sqrt{3x+1}$ (1)

Xét hàm số f(t) = t^3 + t với $t \in \mathbb{R}$

Ta có f'(t) = $3t^2$ + 1 > 0, $\forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác f(t) là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

Do đó phương trình

$$(1) \Leftrightarrow f(x+1) = f(\sqrt{3x+1}) \Leftrightarrow x+1 = \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \ge 0 \\ 3x+1 = (x+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. \text{(thỏa mãn điều kiện (*)).}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $T = \{0;1\}$

- *Phân tích:*

+) Giáo viên giúp học sinh nhận ra cần đưa hai về phương trình về dạng f(g(x)) = f(h(x)) với hàm đặc trưng $f(t) = m.t^3 + n.t$.

+) Đồng nhất sao cho biểu thức ở hai vế phải có dạng $m.(\sqrt[3]{3x-5})^3 + n.\sqrt[3]{3x-5}$

+) Tìm những hạng tử ở hai vế sao cho phương trình đã cho có dạng $m(px+u)^3 + l.(px+u) = m.(\sqrt[3]{3x-5}) + l.\sqrt[3]{3x-5}$ (*)

<u>**Ví dụ 6:**</u> Giải phương trình: $x^3 + 1 = 2.\sqrt[3]{2x-1}$ $(x \in \mathbb{R})$

Lời giải tham khảo

TXĐ: D = $\mathbb{R}$

$$x^3 + 1 = 2.\sqrt[3]{2x-1} \Leftrightarrow x^3 + 2x = 2x - 1 + 2.\sqrt[3]{2x-1}$$
$$\Leftrightarrow x^3 + 2x = (\sqrt[3]{2x-1})^3 + 2.\sqrt[3]{2x-1}$$

Xét hàm số f(t) = t^3 +2t với $t \in \mathbb{R}$

Ta có f'(t) = $3t^2$ + 2 > 0, $\forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác f(t) là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

Do đó phương trình

$$(1) \Leftrightarrow f(\mathrm{x}) = f(\sqrt[3]{2\mathrm{x}-1}) \Leftrightarrow \mathrm{x} = \sqrt[3]{2\mathrm{x}-1} \Leftrightarrow x^3 = 2\mathrm{x}-1$$

$$\Leftrightarrow (\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}^2 + \mathrm{x} - 1) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{x} \in \left\{1; \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $T = \left\{1; \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$

- *Phân tích :*

Bài toán (1) cũng giải được theo cách đưa về hệ phương trình đối xứng loại 2, tuy nhiên ta thấy sử dụng phương pháp hàm đặc trưng bài toán trở lên đơn giản và dễ dàng hơn

<u>Ví dụ 7:</u> Giải phương trình: $x^3 - 7x^2 + 9x + 12 = (x-3)\left(x - 2 + 5\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x-3} - 1\right)$ (1).

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x - 3 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 3$ (2).

Phương trình

$$(1) \Leftrightarrow (x-4)\left(x^2 - 3x - 3\right) = (x-3)\left(x - 2 + 5\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x-3} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x-3} - 1\right)\left(\sqrt{x-3} + 1\right)\left(x^2 - 3x - 3\right) = (x-3)\left(x - 2 + 5\sqrt{x-3}\right)\left(\sqrt{x-3} - 1\right)$$

$$\Leftrightarrow (\left(\sqrt{x-3} - 1\right)(\left(\sqrt{x-3} + 1\right)\left(x^2 - 3x - 3\right) - (x-3)\left(x - 2 + 5\sqrt{x-3}\right)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-3} - 1 = 0 \longrightarrow \sqrt{x-3} = 1 \Leftrightarrow x = 4 \\ \left(\sqrt{x-3} + 1\right)\left(x^2 - 3x - 3\right) = (x-3)\left(x - 2 + 5\sqrt{x-3}\right) \quad (*) \end{array}\right.$$

Dễ thấy $x = 3$ không là nghiệm của phương trình đã cho.

Với $x > 3$, giải phương trình $(*)$ ta được $\dfrac{x^2 - 3x - 3}{x - 3} = \dfrac{x - 2 + 5\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3} + 1}$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-4)^2 + 5(x-4) + 1}{x - 4 + 1} = \frac{x - 3 + 5\sqrt{x-3} + 1}{\sqrt{x-3} + 1} \Leftrightarrow f(x-4) = f\left(\sqrt{x-3}\right).$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t^2 + 5t + 1}{t + 1}$ trên $(-1; +\infty)$, Ta có $f'(t) = 1 + \dfrac{3}{(t+1)^2} > 0, \forall t \in (-1;+\infty)$.

Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $(-1;+\infty)$

Do đó phương trình (*) $\Leftrightarrow f(x-4) = f\left(\sqrt{x-3}\right)$.

$$\Leftrightarrow x-4 = \sqrt{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 \geq 0 \\ (x-4)^2 = x-3 \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x^2 - 9x + 19 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{9+\sqrt{5}}{2}$$ (thỏa mãn điều kiện (2)).

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho có nghiệm $T = \left\{4; \dfrac{9+\sqrt{5}}{2}\right\}$

<u>Ví dụ 8</u>: Giải phương trình: $(x+3).\sqrt{x+1} + (x-3).\sqrt{1-x} + 2x = 0 \quad (x \in \mathbb{R})$.

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $-1 \leq x \leq 1$ (*)

$$(x+3).\sqrt{x+1} + (x-3).\sqrt{1-x} + 2x = 0$$

Ta có: $\Leftrightarrow [(x+1)+2].\sqrt{x+1} + 2x = [(1-x)+2]\sqrt{1-x}$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x+1})^3 + (\sqrt{x+1})^2 + 2.\sqrt{x+1} = (\sqrt{1-x})^3 + (\sqrt{1-x})^2 + 2.\sqrt{1-x} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t^2 + 2t$ với $t \in [0;+\infty)$

Ta có $f'(t) = 3t^2 + 2t + 2 > 0, \ \forall t \in [0;+\infty)$ suy ra hào số f(t) đồng biến trên $[0;+\infty)$. Mặt khác f(t) làm hàm liên tục trên $[0;+\infty)$.

Dó đó phương trình

(1) $\Leftrightarrow f(\sqrt{x+1}) = f(\sqrt{1-x}) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{1-x} \Leftrightarrow x+1 = 1-x \Leftrightarrow x = 0$ (thỏa mãn điều kiện (*)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất x = 0.

Phân tích:

Giáo viên giúp học sinh nhận ra cách biểu diễn x + 3 và $x-3$ theo hai biểu thức trong căn bậc hai. Đối với số hạng 2x, học sinh cũng phải biểu diễn được chúng qua (x+1) và

(1 - x), dễ dàng có được 2x = (x+1)-(1-x), và với điều kiện $-1 \le x \le 1$ *thì ta viết được* $x+1 = (\sqrt{x+1})^2$ *và* $1-x = (\sqrt{1-x})^2$*, như vậy bài toán trên sẽ được giải quyết một cách dễ dàng/*

<u>Ví dụ 9</u>: Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{2x^2+1} + \sqrt[3]{2x^2} \quad (1) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải tham khảo

Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

Đặt $u = \sqrt[3]{x+1}$ *và* $v = \sqrt[3]{2x^2}$ khi đó phương trình đã cho trở thành :

$\sqrt[3]{u+1} + u = \sqrt[3]{v^3+1} + v$ *(1a)*

Xét hàm số $f(t) = \sqrt[3]{t^3+1} + t$ với $t \in \mathbb{R}$

$f'(t) = \dfrac{t^2}{\sqrt[3]{(t^3+1)^2}} + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$

Mặt khác f(t) là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$

Do đó phương trình (1a) $\Leftrightarrow f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$

Với u = v ta có $\sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{2x^2} \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có tập nghiệm $T = \left\{-\dfrac{1}{2}; 1\right\}$

- *Phân tích:*

Giáo viên yêu cầu học sinh phân tích bài toán để chỉ ra hàm đặc trưng trong ví dụ này. Từ đó yêu cầu học sinh phân tích mối quan hệ giữa các đối tượng trong bài toán. Biểu thức dưới dấu căn bậc hai ở hai vế có chung một mối liên hệ là x+2 = (x+1)=1 và $2x^2+1$ *=*$(2x)^2+1$*, do vậy nếu đặt* $u = \sqrt[3]{x+1}$ *và* $v = \sqrt[3]{2x^2}$ *thì phương trình đã cho trở thành:* $\sqrt[3]{u+1} + u = \sqrt[3]{v^3+1} + v$*, khi đó ta thấy phương trình sẽ được giải bằng phương pháp hàm đặc trưng, trong đó hàm đặc trưng ở đây là* $f(t) = \sqrt[3]{t^3+1} + t$

<u>Ví dụ 10:</u> Giải phương trinh: $x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = \sqrt[3]{7x^2+9x-4} \quad (x \in \mathbb{R}).$

Lời giải tham khảo

Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

Đặt $y = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}$, ta có hệ :

$$\begin{cases} x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = y \\ y^3 = 7x^2 + 9x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = y \\ 7x^2 + 9x - 4 = y^3 \end{cases}$$

Cộng vế với vế của hai phương trình với nhau ta được phương trình:

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = y^3 + y \Leftrightarrow (x+1)^3 + (x+1) = y^3 + y \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ với $t \in \mathbb{R}$

Ta có f'(t) = $3t^2 + 1 > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác f(t) là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

Do đó phương trình (1) $\Leftrightarrow f(x+1) = f(y) \Leftrightarrow y = x + 1$

Với y = x+ 1 ta có phương trình:

$$x + 1 = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4} \Leftrightarrow (x+1)^3 = 7x^2 + 9x - 4 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $T = \left\{\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}; 5\right\}$

Phân tích:

Đối với ví dụ trên để tạo ra hàm đặc trưng quả là không đơn giản chút nào. Điều này yêu cầu học sinh phải luôn linh hoạt và sáng tạo khi giải toán. Việc đặt biểu thức căn bậc ba là một ẩn mới là một hướng giải quyết hoàn toàn hợp lý để làm xuất hiện hàm đặc trưng trong ví dụ trên.

Ví dụ 11: Giải phương trình

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 7 = \sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Lời giải tham khảo

Tập xác định: D = $\mathbb{R}$

Đặt $y = \sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}$, ta có hệ :

$$\begin{cases} x^3-6x^2+12x-7=y \\ y^3=-x^3+9x^2-19x+11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x^3-12x^2+24x-14=2y \\ -x^3+9x^2-19x+11=y^3 \end{cases} \end{cases}$$

Công vế với vế của hai phương trình này với nhau ta được

$$x^3-3x^2+5x-3=y^3+2y \Leftrightarrow (x-1)^3+2(x-1)=y^3+y \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+2t$ với $t\in\mathbb{R}$

Ta có f'(t) = $3t^2+2>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác f(t) là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

Do đó phương trình (1) $\Leftrightarrow f(x\text{-}1)=f(y)\Leftrightarrow y=x-1$

Với y = x - 1 ta có phương trình:

$$x-1=\sqrt[3]{-x^3+9x^2-19x+11} \Leftrightarrow (x\text{-}1)^3=-x^3+9x^2-19x+11$$
$$\Leftrightarrow x^3-6x^2+11x-6=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-5x+6)=0 \Leftrightarrow x\in\{1;2;3\}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $T=\{1;2;3\}$

<u>Ví dụ 12:</u> Giải phương trình

$$(2x+3)\sqrt{4x^2+12x+11}+3x\sqrt{9x^2+2}+5x+3=0 \quad (1) \quad (x\in\mathbb{R}).$$

Lời giải tham khảo

Ta có $\begin{cases} 9x^2+2>0,\ \forall x\in\mathbb{R} \\ 4x^2+12x+11=(2x+3)^2+2>0,\ \forall x\in\mathbb{R} \end{cases}$

Do đó tập xác định D = $\mathbb{R}$

$$(1)\Leftrightarrow (2x+3)\sqrt{(2x+3)^2+2}+2x+3=(\text{-}3x)\sqrt{(-3x)^2+2}+(-3x) \quad (1a)$$

Xét hàm số $f(t)=t.\sqrt{t^2+2}+t$ với $t\in\mathbb{R}$

$f'(t)=\dfrac{2t^2+2}{\sqrt{t^2+2}}+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$

Mặt khác hàm f(t) là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$

Do đó phương rình (1a) $\Leftrightarrow f(2x+3)=f(-3x)\Leftrightarrow 2x+3=-3x\Leftrightarrow$ x= - $\dfrac{3}{5}$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -\frac{3}{5}$

<u>Ví dụ 13 :</u> Giải phương trình

$$(\sqrt{4x^4 - 12x^3 + 9x^2 + 16} - 2x^2 + 3x)(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}) = 8 \quad (x \in \mathbb{R})$$

Lời giải tham khảo

Điều kiện : $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 4x^4 - 12x^3 + 9x^2 + 16 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x \geq 1 \\ (2x^2 - 3x)^2 + 16 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1 \ (*)$

Đặt $u = x^2 - \frac{3x}{2}$, $v = \sqrt{x-1} \geq 0$. Phương trình đã cho trở thành :

$$(\sqrt{4u^2 + 16} - 2u)(\sqrt{v^2 + 4} + v) = 8 \Leftrightarrow (\sqrt{u^2 + 4} - u)(\sqrt{v^2 + 4} + v) = 4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{u^2 + 4} - u = \frac{4}{\sqrt{v^2 + 4} + v} \Leftrightarrow \sqrt{u^2 + 4} - u = \sqrt{v^2 + 4} - v \quad (1)$$

Xét hàm số f(t) với $t \in \mathbb{R}$

Ta có $f'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 4}} + 1 = \frac{\sqrt{t^2 + 4} + t}{\sqrt{t^2 + 4}} > \frac{\sqrt{t^2} + t}{\sqrt{t^2 + 4}} = \frac{|t| + t}{\sqrt{t^2 + 4}} \geq 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$**.**

Mặt khác f(t) là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$

Do đó phương trình (1) $\Leftrightarrow f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$

Ta có $x = v^2 + 1$. Do đó

$$u = v \Leftrightarrow (v^2 + 1) - \frac{3}{2}(v^2 + 1) = v \Leftrightarrow 2v^4 + v^2 - 2v - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (v-1)(2v^3 + 2v^2 + 3v + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = 1 \\ 2v^3 + 2v^2 + 3v + 1 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$$

Với $v \geq 0$, ta có $2v^3 + 2v^2 + 3v + 1 \geq 0 + 0 + 0 + 1 > 0$ do đó (2) vô nghiệm.

Với v = 1 ta có x = 2 (thỏa mãn điều kiện (*))

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất x = 2.

Qua các ví dụ trên, phần nào ta đã có một số kinh nghiệm khi áp dụng tính chất hàm đặc trưng để giải cho các phương trình. Tương tự, cũng vẫn khai khác tính chất của hàm đặc trưng, ta sẽ xét tiếp việc áp dụng đối với bất phương trình.

II. Khai thác tính chất hàm đặc trưng để giải bất phương trình

Sau đây chúng ra sẽ xét tiếp các bài toán giải bất phương trình bằng cách sử dụng tính chất của hàm đặc trưng.

Một số dạng bất phương trình thường gặp và cách giải :

Dạng 1 : $ax^3 + bx^2 + cx + d < n.\sqrt[3]{ex + v}$ (1)

Nếu bài toán giải được bằng phương pháp hàm đặc trưng thì ta sẽ thực hiện các bước sau :

Bước 1 : Xác định các hệ số m, p, u sao cho

$$ax^3 + bx^2 + cx + d < n.\sqrt[3]{ex + v} \Leftrightarrow m.(px + u)^3 + n.(px + u) < m.(ex + v) + n.\sqrt[3]{(ex + v)}$$

Bước 2 : Xét tính đơn điệu của hàm đặc trưng $f(t) = mt^3 + nt$, chứng minh được hàm số $f(t)$ luôn đồng biến hoặc nghịch biến trên miền cần xác định.

Khi đó nếu hàm số $f(t)$ đồng biến trên miền xác định thì bất phương trình

$$(1) \Leftrightarrow f(px + u) < f(\sqrt[3]{ex + v}) \Leftrightarrow px + u < \sqrt[3]{ex + v} \quad (2)$$

Nếu hàm số $f(t)$ nghịch biến trên miền xác định thì bất phương trình

$$(1) \Leftrightarrow f(px + u) < f(\sqrt[3]{ex + v}) \Leftrightarrow px + u > \sqrt[3]{ex + v} \quad (2')$$

Bước 3 : Tìm cách giải cho bất phương trình (2) hoặc (2')

Hoàn toàn tương tự đối với các bất phương trình

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \le n.\sqrt[3]{ex + v}$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d > n.\sqrt[3]{ex + v}$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \ge n.\sqrt[3]{ex + v}$$

Dạng 2 : $ax^3 + bx^2 + cx + d < (e_1x + v_1).\sqrt{ex + v}$ (1)

Nếu bất phương trình giải được bằng phương pháp dùng hàm đặc trưng thì các bước thực hiện là :

Bước 1: Xác định các hệ số m, p , u sao cho

$$ax^3 + bx^2 + cx + d < (e_1x + v_1).\sqrt{ex + v} \Leftrightarrow m(px + u)^3 + n.(px + u) < m.(\sqrt{ex + v})^3 + n.\sqrt{ex + v}$$

<u>Bước 2 :</u> Xét tính đơn điệu của hàm đặc trưng f(t) = mt³ +nt, chứng minh hàm số f(t) luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến trên miền xác định

Khi đó nếu hàm số f(t) đồng biến trên miền xác định thì bất phương trình

$(1) \Leftrightarrow f(px+u) < f(\sqrt[3]{ex+v}) \Leftrightarrow px+u < \sqrt[3]{ex+v}$ (2)

Nếu hàm số f(t) nghịch biến trên miền xác định thì bất phương trinh

$(1) \Leftrightarrow f(px+u) < f(\sqrt[3]{ex+v}) \Leftrightarrow px+u > \sqrt[3]{ex+v}$ (2')

<u>Bước 3 :</u> Tìm cách giải cho bất phương trình (2) và (2').

Hoàn toàn tương tự đối với các bất phương trình có dạng :

$$ax^3+bx^2+cx+d \le (e_1x+v_1).\sqrt[3]{ex+v}$$

$$ax^3+bx^2+cx+d > (e_1x+v_1).\sqrt[3]{ex+v}$$

$$ax^3+bx^2+cx+d \ge (e_1x+v_1).\sqrt[3]{ex+v}$$

Sau đây chúng ta sẽ xét một vài ví dụ minh học cho phương pháp trên.

<u>Ví dụ 1:</u> Giải bất phương trình $(x+2)\sqrt{x+1} > 27x^3-27x^2+12x-2$ (1)

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x \ge -1$ (*).

Bất phương trình

$(1) \Leftrightarrow (3x-1)^3+3x-1 < (\sqrt{x+1})^3+\sqrt{x+1} \Leftrightarrow f(3x-1) < f(\sqrt{x+1})$ (2).

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ với $t \in \mathbb{R}$

Ta có $f'(t)=3t^2+1>0,\ \forall t$ nên $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $f(t)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Do đó phương trình : $(2) \Leftrightarrow f(3x-1) < f(\sqrt{x+1}) \Leftrightarrow 3x-1 < \sqrt{x+1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \ge 0 \\ 3x-1<0 \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} 3x-1 \ge 0 \\ 9x^2-7x<0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x \le \frac{7}{9}.$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được $-1 \le x \le \frac{7}{9}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $T=\left[-1;\dfrac{7}{9}\right]$.

Phân tích lời giải.

Trong ví dụ này, để xuất hiện hàm số đặc trưng $f(t)=t^3+t$ học sinh cần biến đổi linh hoạt các số hạng trong mỗi vế của bất phương trình.

Ví dụ 2: Giải bất phương trình

$$27x^3-27x^2+12x-2<(x+2)\sqrt{x+1}\qquad (x\in\mathbb{R})$$

Lời giải tham khảo

Điều kiện : $x\geq -1$ (*).

$$27x^3-27x^2+12x-2<(x+2)\sqrt{x+1}\Leftrightarrow (3x-1)^3+3x-1<(\sqrt{x+1})^3+\sqrt{x+1}\qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=t^3+t$ với $t\in\mathbb{R}$

Ta có $f'(t)=3t^2+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác f(t) là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

Do đó bất phương trình

$$(1)\Leftrightarrow f(3x-1)<f(\sqrt{x+1})\Leftrightarrow \sqrt{x+1}>3x-1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x-1<0\\ x+1\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}3x+1\geq 0\\ x+1>(3x-1)^2\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1\leq x\leq \dfrac{1}{3}\\ \begin{cases}x\geq \dfrac{1}{3}\\ 9x^2-7x<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1\leq x\leq \dfrac{1}{3}\\ \begin{cases}x\geq \dfrac{1}{3}\\ 0<x<\dfrac{7}{9}\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1\leq x\leq \dfrac{1}{3}\\ \dfrac{1}{3}\leq x<\dfrac{7}{9}\end{array}\right.\Leftrightarrow -1\leq x<\dfrac{7}{9}$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được $-1\leq x<\dfrac{7}{9}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $T=\left[-1;\dfrac{7}{9}\right)$

Phân tích lời giải:

Giáo viên cần hướng dẫn học sinh tách biểu thức và biến đổi về dạng:

$$(x+2)\sqrt{x+1}=\left[(x+1)+1\right]\sqrt{x+1}=(\sqrt{x+1})^3+\sqrt{x+1}$$

Từ đó dẫn đến việc xét hàm đặc trưng dạng $f(t)=t^3+t$ *với* $t\in\mathbb{R}$

Ví dụ 3: Giải bất phương trình: $x^4-17x^3+34x^2-32x+12\le 5x\sqrt{x-1}$ (1)

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x\ge 1$ (*).

$$(1)\Leftrightarrow 5x\sqrt{x-1}+25x^2(x-1)\ge x^4+8x^3+9x^2-32x+12$$

$$\Leftrightarrow 25x^2(x-1)+5x\sqrt{x-1}\ge (x^2+4x-4)^2+(x^2+4x-4) \quad (2)$$

Với $x\ge 1\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{x-1}\ge 0\\ x^2+4x-4\ge 1\end{cases}$ hay $\begin{cases}\sqrt{x-1}\in\left[0;+\infty\right)\\ x^2+4x-4\in\left[1;+\infty\right)\end{cases}$.

Xét hàm số $f(t)=t^2+t$ trên $\left[0;+\infty\right)$

Ta có $f'(t)=2t+1>0,\ \forall t\ge 0$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$

Mặt khác $f(t)$ là hàm số liên tục trên $\left[0;+\infty\right)$

Do đó bất phương trình

$$(2)\Leftrightarrow f(5x\sqrt{x-1})\ge f(x^2+4x-4).$$

$$\Leftrightarrow 5x\sqrt{x-1}\ge x^2+4x-4 \xleftrightarrow{Chia:\ x^2\ >\ 1} 5.\sqrt{\frac{x-1}{x^2}}\ge 1+4\cdot\frac{x-1}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow 4\cdot\frac{x-1}{x^2}-5\cdot\sqrt{\frac{x-1}{x^2}}+1\le 0\Leftrightarrow \frac{1}{4}\le\sqrt{\frac{x-1}{x^2}}\le 1\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-x+1\ge 0\\ x^2-16x+16\le 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2-16x+16\le 0\Leftrightarrow 8-4\sqrt{3}\le x\le 8+4\sqrt{3}.$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được $8-4\sqrt{3}\le x\le 8+4\sqrt{3}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $T=[8-4\sqrt{3};8+4\sqrt{3}]$.

<u>Ví dụ 4:</u> Giải bất phương trình : $8x^3 + 2x > (x+2)\sqrt{x+1}$ $(x \in \mathbb{R})$.

Lời giải tham khảo

Điều kiện : $x \ge -1$ (*).

$8x^3 + 2x > (x+2)\sqrt{x+1} \Leftrightarrow (2x)^3 + 2x > (\sqrt{x+1})^3 + \sqrt{x+1}$ (1)

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ với $t \in \mathbb{R}$

Ta có f'(t) = $3t^2 + 1 > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác f(t) là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

Do đó bất phương trình

$$(1) \Leftrightarrow f(2x) > f(\sqrt{x+1}) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} < 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \ge 0 \\ x+1 < (2x)^2 \end{cases}$$

(1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 4x^2 - x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x < \dfrac{1-\sqrt{17}}{8} \\ x > \dfrac{1+\sqrt{17}}{8} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1+\sqrt{17}}{8}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \le x \le \dfrac{1}{3} \\ \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{3} \\ 9x^2 - 7x < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \le x \le \dfrac{1}{3} \\ \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{3} \\ 0 < x < \dfrac{7}{9} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \le x \le \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} \le x < \dfrac{7}{9} \end{array}\right. \Leftrightarrow -1 \le x < \frac{7}{9}$$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được $x > \dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $T = (\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}; +\infty)$

<u>Ví dụ 5 :</u> Giải phương trình

$$4x^3 + 18x^2 + 27x + 14 < \sqrt[3]{4x+5} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải tham khảo

TXĐ : D = $\mathbb{R}$

$$4x^3 + 18x^2 + 27x + 14 < \sqrt[3]{4x+5} \Leftrightarrow 8x^3 + 36x^2 + 54x + 28 < 2\sqrt[3]{4x+5}$$
$$\Leftrightarrow (2x+3)^3 + 2(2x+3) < (\sqrt[3]{4x+5})^3 + 2.\sqrt[3]{4x+5} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t$ với $t \in \mathbb{R}$

Ta có f'(t) = $3t^2 + 2 > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác f(t) là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

Do đó phương trình

$$(1) \Leftrightarrow f(2x+3) < f(\sqrt[3]{4x+5}) \Leftrightarrow 2x+3 < \sqrt[3]{4x+5} \Leftrightarrow (2x+3)^3 < 4x+5$$
$$\Leftrightarrow 4x^3 + 18x^2 + 25x + 11 < 0 \Leftrightarrow (x+1)(4x^2 + 14x + 11) < 0$$
$$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{-7-\sqrt{5}}{4}\right) \cup \left(\frac{-7+\sqrt{5}}{4}; -1\right)$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là : $T = \left(-\infty; \frac{-7-\sqrt{5}}{4}\right) \cup \left(\frac{-7+\sqrt{5}}{4}; -1\right)$

- *Phân tích :*

Để ý lời giải trên ta thấy, nếu giữ nguyên bất phương trình và đồng nhất hệ số thì ta cũng vẫn tìm được kết quả nhưng quá trình biến đổi sẽ rất phức tạp, cồng kềnh. Để cho dễ dàng trong việc tính toán, ta nên nhân hai vế của bất phương trình với 2, vì ta để ý $(2x)^3 = 8x^3$. Từ đó ta phân tích để xuất hiện hàm đặc trưng dạng $f(t) = t^3 + 2t$

Ví dụ 6: Giải bất phương trình

$$\sqrt{x^2 - 2x + 3} - \sqrt{x^2 - 6x + 11} > \sqrt{3-x} - \sqrt{x-1} \quad (1) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải tham khảo

Điều kiện : $\begin{cases} x - 1 \ge 0 \\ 3 - x \ge 0 \\ x^2 - 2x + 3 \ge 0 \\ x^2 - 6x + 11 \ge \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x \le 3 \\ (x-1)^2 + 2 \ge 0 \\ (x-3)^2 + 2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le x \le 3$ (*)

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + 2} + \sqrt{x+1} > \sqrt{(3-x)^2 + 2} + \sqrt{3-x} \quad (1a)$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t^2 + 2} + \sqrt{t}$ với $t \in [0; +\infty)$

Ta có $f'(t)=\frac{t}{\sqrt{t^2+2}}+\frac{1}{2\sqrt{t}}>0,\ \forall t\in(0;+\infty)$ suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $(0;+\infty)$

Mặt khác $f(t)$ là hàm liên tục trên $[0;+\infty)$

Do đó bất phương trình $(1)\Leftrightarrow f(x-1)>f(3-x)\Leftrightarrow x-1>3-x\Leftrightarrow x>2.$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được $2<x\le 3$

Vật tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $T=(2;3]$

Phân tích:

Ở ví dụ trên giáo viên hướng dẫn học sinh khéo léo phân tích

$\sqrt{x^2-2x+3}=\sqrt{(x+1)^2+2}$ và $\sqrt{x^2-6x+11}=\sqrt{(3-x)^2+2}$ để từ đó sẽ nhận ra được hàm đặc trưng.

Ví dụ 7: Giải bất phương trình

$$\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{3x^2+3x+1}<\frac{x^2+x}{(x^2+x+1)(3x^2+3x+1)}\qquad (x\in\mathbb{R})$$

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $\begin{cases}x^2+x+1\ge 0\\ x^2-6x+11\ge\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0\\ 3(x+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}>0\end{cases}\Leftrightarrow\forall x\in\mathbb{R}$ (*)

$$\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{3x^2+3x+1}<\frac{x^2+x}{(x^2+x+1)(3x^2+3x+1)}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{3x^2+3x+1}<\frac{1}{2}(\frac{1}{x^2+x+1}-\frac{1}{3x^2+3x+1})$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+x+1}<\sqrt{3x^2+3x+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{3x^2+3x+1}\qquad(1)$$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t}-\frac{1}{2}.\frac{1}{t},\quad\forall t\in(0;+\infty)$

Ta có $f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}+\frac{1}{2}.\frac{1}{t^2}>0,\quad\forall t\in(0;+\infty)$ suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $(0;+\infty)$

Mặt khác $f(t)$ là hàm liên tục trên $(0;+\infty)$

Do đó bất phương trình

$$(1) \Leftrightarrow f(x^2+x+1) < f(3x^2+3x+1) \Leftrightarrow x^2+x+1 < 3x^2+3x+1$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+2x > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-1) \cup (0;+\infty)$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $T = (-\infty;-1) \cup (0;+\infty)$

Phân tích :

Trong ví dụ trên, giáo viên giúp học sinh quan sát để dễ dàng nhìn ra tách vế phải ra thành hai biểu thức có liên quan với vế trái, và từ đó ta có được cách giải sau

Ví dụ 8: Giải bất phương trình

$$x - \sqrt{3x-2} \le \sqrt{9x^2-6x} - x\sqrt{x^2+2} \quad (1) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải tham khảo

Điều kiện : $x \ge \frac{2}{3}$ (*)

$$(1) \Leftrightarrow x + x\sqrt{x^2+2} \le \sqrt{3x-2} + \sqrt{3x(3x-2)}$$
$$\Leftrightarrow x + x\sqrt{x^2+2} \le \sqrt{3x-2} + \sqrt{3x-2}.\sqrt{(\sqrt{3x-2})^2+2}$$

Xét hàm số $f(t) = t + t\sqrt{t^2+2}$ với $t \in \mathbb{R}$

Ta có $f'(t) = 1 + \sqrt{t^2+2} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2+2}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$

Mặt khác $f(t)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$

Do đó bất phương trình $(1) \Leftrightarrow f(x) \le f(\sqrt{3x-2}) \Leftrightarrow x \le \sqrt{3x-2}$ (2)

Với điều kiện (*) ta có $(2) \Leftrightarrow x^2 \le 3x-2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \le 0 \Leftrightarrow 1 \le x \le 2$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được $1 \le x \le 2$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $T = [1;2]$

Phân tích:

Trong lời giải của ví dụ trên, giáo viên cần nhấn mạnh phương pháp tách các số hạng để tạo ra các nhóm phù hợp để xét hàm đặc trưng, ta đi nhóm x và $x\sqrt{x^2+2}$ *,* $\sqrt{3x-2}$ *và* $\sqrt{9x^2-6x}$ *với nhau (vì với điều điện để phương trình có nghĩa thì* $\sqrt{9x^2-6x}=\sqrt{3x(3x-2)}=\sqrt{3x-2}.\sqrt{3x}$ *)*

__Ví dụ 9__: Giải bất phương trình

$$3x.(2+\sqrt{9x^2+3})+(4x+2)(\sqrt{1+x+x^2}+1)\geq 0 \quad (x\in\mathbb{R}) \quad (1)$$

Lời giải tham khảo

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Bất phương trình

$(1)\Leftrightarrow 3x.(2+\sqrt{9x^2+3}\geq -(4x+2)(\sqrt{1+x+x^2}+1)$

$\Leftrightarrow 2.3x+3x.\sqrt{(3x)^2+3}\geq 2(-2x-1)\text{+(-2}x-1)(\sqrt{(-2x-1)^2+3} \qquad (2)$

Xét hàm số $f(t)=2t+t.\sqrt{t^2+3}$ với $t\in\mathbb{R}$

Ta có $f'(t)=2+\sqrt{t^2+3}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+3}}>0,\forall t\in\mathbb{R}$ suy ra f(t) là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$

Mặt khác $f(t)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$

Do đó bất phương trình $(2)\Leftrightarrow f(3x)\geq f(-2x-1)\Leftrightarrow 3x\leq -2x-1 \Leftrightarrow x\geq -\dfrac{1}{5}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $T=\left[-\dfrac{1}{5};+\infty\right)$

- ***__Phân tích :__***

Thông qua ví dụ trên, một lần nữa ta được thấy việc biểu diễn các số hạng qua nhau để xuất hiện hàm đặc trưng. Với biểu thức $\sqrt{9x^2+3}$ *có thể biểu diễn qua 3x bằng cách* $\sqrt{9x^2+3}=\sqrt{(3x)^2+3}$

__Ví dụ 10:__ Giải bất phương trình: $4|2x-1|(x^2-x+1)>x^3-6x^2+15x-14 \quad (1)$

Lời giải tham khảo

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Ta có bất phương trình

$(1) \Leftrightarrow |2x-1|[(2x-1)^2+3] > (x-2)^3+3x-6$

$\Leftrightarrow |2x-1|^3 + 3.|2x-1| > (x-2)^3 + 3(x-2) \quad (*)$

Xét hàm số f(t) = t^3 +3t với $t \in \mathbb{R}$, ta có f'(t) = $3t^2$ + 3 > 0, $\forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác f(t) là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

Do đó bất phương trình (*) $\Leftrightarrow f(|2x-1|) > f(x-2) \Leftrightarrow |2x-1| > x-2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2} \\ 2x-1 > x-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x < \dfrac{1}{2} \\ 2x-1 < -x+2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge \dfrac{1}{2} \\ x > -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < \dfrac{1}{2} \\ x < 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge \dfrac{1}{2} \\ x < \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

Vậy bất phương trình nghiệm đúng $\forall x \in \mathbb{R}$.

- ***Phân tích:***

Rõ ràng việc $\sqrt{1+x+x^2}$ sẽ biến đổi như thế nào là một điều hơi khó khăn. Thông qua lời giải ví dụ trên, cho chúng ta một cách xử lý rất hay kiên biến đổi $\sqrt{1+x+x^2}$

Ví dụ 11: Giải bất phương trình: $\sqrt[3]{24x-11} - 16x\sqrt{2x-1} - 1 \le 0 \qquad (1)$

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x \ge \dfrac{1}{2} \quad (*)\cdot$

Đặt $y = \sqrt{2x-1} \ge 0 \Rightarrow y^2 = 2x-1 \Leftrightarrow x = \dfrac{y^2+1}{2}\cdot$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{24\cdot\frac{y^2+1}{2} - 11} - 16\cdot\frac{y^2+1}{2}\cdot\sqrt{2\cdot\frac{y^2+1}{2} - 1} - 1 \le 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{12y^2+1} - 8(y^2+1)\sqrt{y^2} - 1 \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{12y^2+1} \ge 8y^3 + 8y + 1$$

$$\Leftrightarrow 8y^3 + 12y^2 + 8y + 2 \le \sqrt[3]{12y^2+1} + 12y^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow (2y+1)^3 + (2y+1) \le (\sqrt[3]{12y^2+1})^3 + \sqrt[3]{12y^2+1} \quad (2)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$ với $t \in \mathbb{R}$

T có có $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Mặt khác $f(t)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

Do đó bất phương trình

$$(2) \Leftrightarrow f(2y+1) \le f(\sqrt[3]{12y^2+1}) \Leftrightarrow 2y+1 \le \sqrt[3]{12y^2+1}$$

$$\Leftrightarrow (2y+1)^3 \le 12y^2 + 1 \Leftrightarrow 8y^3 + 6y \le 0 \Leftrightarrow 2y(4y^2+3) \le 0 \Leftrightarrow y \le 0$$

Suy ra: $\sqrt{2x-1} \le 0 \Leftrightarrow 2x-1=0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\cdot$

Kết hợp với điều kiện (*) suy ra $x = \frac{1}{2}\cdot$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình có nghiệm là $T = \left\{\frac{1}{2}\right\}\cdot$

Cũng giống như phương trình, các bất phương trình cũng vô cùng phong phú, và không phải khi giải bất phương trình ta chỉ gặp những dạng nêu trên mà chúng ta còn có thể gặp nhiều dạng khác nữa. Do đó đòi hỏi người học phải tìm tòi, sáng tạo, linh hoạt khi đứng trước một bài toán. Sẽ là không toàn diện nếu chúng ta bỏ qua việc khai thác tính chất này đối với hệ phương trình đại số nói riêng và hệ phương trình nói chung. Chúng ta nghiên cứu nội dung phần 3 sau đây.

III. Khai thác tính chất đặc trưng để giải hệ phương trình đại số.

Đối với hệ phương trình đại số giải bằng phương pháp sử dụng tính chất của hàm đặc trưng, ta thấy có một điểm chung là đều từ một phương trình, phát hiện ra việc khai thác tính chất hàm đặc trưng, đưa phương trình đó về một phương trình đơn giản hơn, sau đó dùng phương pháp thế, kết hợp với phương trình còn lại, ta sẽ giải quyết được bài toán. Chúng ta quan sát các ví dụ sau đây để thấy được rõ hơn phương pháp giải này.

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} (y-2)\sqrt{x+2} - x\sqrt{y} = 0 & (1) \\ \sqrt{x+1}\left(\sqrt{y}+1\right) = (y-3)\left(1+\sqrt{x^2+y-3x}\right) & (2) \end{cases}$

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 0 \\ x^2 + y - 3x \geq 0 \end{cases}$ (*)

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{x+2} \\ b = \sqrt{y} \end{cases}$, $(a \geq 1, b \geq 0)$, ta được $\begin{cases} x = a^2 - 2 \\ y = b^2 \end{cases}$.

Khi đó phương trình (1) trở thành

$$\left(b^2 - 2\right)a - b\left(a^2 - 2\right) = 0 \Leftrightarrow ab\left(b-a\right) + 2\left(b-a\right) = 0 \Leftrightarrow \left(b-a\right)\left(ab+2\right) = 0 \Leftrightarrow a = b$$

(do $ab + 2 > 0$) nên phương trình (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x+2} = \sqrt{y} \Leftrightarrow x + 2 = y$.

Thay vào phương trình (2), ta được

$$\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+2}+1\right) = \left(x-1\right)\left(1+\sqrt{x^2-2x+2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{\left(x+1\right)+1}\right) = \left(x-1\right)\left(1+\sqrt{\left(x-1\right)^2+1}\right) \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = t\left(1+\sqrt{1+t^2}\right)$ trên $\mathbb{R}$

Ta có $f'\left(t\right) = 1 + \sqrt{1+t^2} + \dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}$, suy ra hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác $f\left(t\right)$ là hàm liên tục trên $\mathbb{R}$

Do đó phương trình

$$(3) \Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+1}\right) = f\left(x-1\right) \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x+1 = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Với $x = 3 \Rightarrow y = 5$, ta thấy $x = 3, y = 5$ thỏa mãn điều kiện (*).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $\left(x;y\right) = \left(3;5\right)$.

<u>Ví dụ 2:</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y & (1) \\ x^2 + y^2 - x + y = \dfrac{1}{2} & (2) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ x^2 + y^2 - x + y = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^3 - 12(x-1) = (y+1)^3 - 12(y+1) & (1a) \\ (x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = 1 & (2a) \end{cases}$$

Từ phương trình (2a) ta suy ra

$$\begin{cases} -1 \le x - \frac{1}{2} \le 1 \\ -1 \le y + \frac{1}{2} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} \le x - 1 \le \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \le y + 1 \le \frac{3}{2} \end{cases}$$

Xét hàm số f(t)= t^3 -12t với $\forall t \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

Ta có $f'(t) = 3t^2 - 12 < 0, \forall t \in \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$. suy ra hàm f(t) nghịch biến trên $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

Mặt khác f(t) là hàm liên tục trên đoạn $\left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right]$.

Do đó phương trình (1a) $\Leftrightarrow f(x-1) = f(y+1) \Leftrightarrow x - 1 = y + 1 \Leftrightarrow y = x - 2$

Thay y = x – 2 và phương trình (2a) ta được phương trình

$$(x - \frac{1}{2})^2 + (x - \frac{3}{2})^2 = 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 8x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{2} \\ x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}), (\frac{3}{2}; -\frac{1}{2})$.

- *Nhận xét :*

- *Ta thấy ở phương trình (1), bậc cao nhất của hai ẩn x, y đều là bậc ba nên ta hướng đến cách phân tích để xuất hiện hàm đặc trưng. Giáo viên hướng dẫn học sinh cách phân tích để được hàm đặc trưng dạng f(t) = t^3 – 12t, từ đó giải quyết bài toán theo các bước thông thường.*

<u>Ví dụ 3:</u> Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{xy}\left(x+y-1\right)=x^2+y^2 & (1) \\ x^2y\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1}=x^2y-x & (2) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $xy\geq 0$.

Ta có $\sqrt{x^2+1}-x>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ nên $y=0$ không thõa mãn (2). Do vậy $y\neq 0$. Suy ra $x=0$ không thõa mãn (1).

Nếu x,y cùng âm thì (1) vô lí. Do đó x,y cùng dương.

Khi đó $(2)\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=y\left(\sqrt{y^2+1}-1\right)\Leftrightarrow \frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}=y\sqrt{y^2+1}-y$ (3).

Xét hàm số $f\left(t\right)=t\sqrt{1+t^2}-t$ trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

Ta có $f'\left(t\right)=\sqrt{t^2+1}+\frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}-1>0,\ \forall t>0$. Suy ra hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$.

Khi đó $(3)\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=f\left(y\right)\Leftrightarrow \frac{1}{x}=y\Leftrightarrow xy=1$.

Thay $xy=1$ vào (1) ta được: $2\left(x+y-1\right)=x^2+y^2\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=0\Leftrightarrow x=y=1$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\left(x;y\right)=\left(1;1\right)$.

- *Phân tích:*

Điểm cơ bản để giải hệ trên là ta tìm được mối quan hệ giữa x và y. Ta thấy, từ phương trình (1), bằng phương pháp thêm bớt hoặc phân tích, dùng đồng nhất hệ số, ta sẽ tìm được biểu thức liên hệ giữa biến x và y thông qua hàm đặc trưng $f\left(t\right)=t\sqrt{1+t^2}-t$. Và sau đó, thế vào phương trình (2), ta dễ dàng đưa được phương trình đã cho về tích hai nhân tử và giải quyết được bài toán.

<u>Ví dụ 4:</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x-1}-\sqrt{y^4+2}=y & (1) \\ x^2+2x(y-1)+y^2-6y+1=0 & (2) \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$.

Lời giải tham khảo

Điều kiện : $x\geq 1, y\in\mathbb{R}$ (*).

$(2) \Leftrightarrow x^2 + 2x(y-1) + (y-1)^2 = 4y \Leftrightarrow \left(x + y - 1\right)^2 = 4y \Rightarrow y \geq 0.$

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)+2} + \sqrt[4]{x-1} = \sqrt{y^4+2} + \sqrt[4]{y^4}$ (1a)

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t+1} + \sqrt[4]{t}$ với $t \in [0;+\infty)$

Ta có $f'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t+1}} + \dfrac{1}{4\sqrt[4]{t^3}} > 0, \forall t > 0$ suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $\left(0;+\infty\right)$

Mặt khác $f(t)$ là hàm liên tục trên $[0;+\infty)$

Do đó phương trình (1a)$\Leftrightarrow f(x-1) = f(y^4) \Leftrightarrow x-1 = y^4 \Leftrightarrow x = y^4 + 1$

Thay vào phương trình (2) ta được:

$$\left(y^4 + y\right)^2 = 4y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \Rightarrow x = 1 \\ y(y^3+1)^2 = 4 \quad (2a) \end{array}\right.$$

Với x = 1 và y = 0 thỏa mãn điều kiện (*).

Giải phương trình (2a):

$$(2a) \Leftrightarrow y^7 + 2y^4 + y - 4 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y^6 + y^5 + y^4 + 3y^3 + 3y^2 + 3y + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow x = 2 \\ y^6 + y^5 + y^4 + 3y^3 + 3y^2 + 3y + 4 = 0 \quad (2b) \end{array}\right.$$

Với x = 2 và y = 1 thỏa mãn điều kiện (*).

Phương trình (2b) vô nghiệm vì với $y \geq 0$ thì vế trái của (2b) luôn lớn hơn 0.

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm (x; y) = (1;0), (2;1)

- *Phân tích:*

Ở ví dụ trên, đa số học sinh nghĩ sẽ cố gắng giải phương trình thứ hai trước vì nghĩ rằng nó đơn giản, có thể đưa về phương trình tích bằng cách đặt nhân tử chung, hoặc đưa được về phương trình tích bằng cách coi (2) là phương trình bậc hai ẩn x, nhưng khi bắt tay vào tính toán theo hướng này thì biết thức denta lại không là số chính phương. Để tránh những khó khăn này, giáo viên định hướng học sinh phân tích bài toán để xuất hiện hàm đặc trưng $f(t) = t^3 - 3t$

<u>Ví dụ 5.</u> Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 3x = \sqrt{(y-1)^3} - \sqrt{9(y-1)} & (1) \\ 1 + \sqrt{x-1} = \sqrt{y-1} & (2) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $\begin{cases} x \ge 1 \\ y \ge 1 \end{cases}$ (*).

Từ phương trình (2) suy ra $\sqrt{y-1} - 1 \ge 0 \Leftrightarrow y \ge 2$

$(1) \Leftrightarrow x^3 - x = (\sqrt{y-1})^3 - 3.\sqrt{y-1}$ (1a)

Xét hàm số $f(t) = t^3 - 3t$ với $t \in [1;+\infty)$

Ta có $f'(t) = 3t^2 - 3 \ge 0, \forall t \ge 1$ suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $[1;+\infty)$

Mặt khác $f(t)$ là hàm liên tục trên trên $[1;+\infty)$

Do đó phương trình $(1a) \Leftrightarrow f(x) = f(\sqrt{y-1}) \Leftrightarrow x = \sqrt{y-1}$

Với x = $\sqrt{y-1}$ thay vào (2) ta được phương trình

$$1 + \sqrt{x-1} = x \Leftrightarrow \sqrt{x-1} - (\sqrt{x-1})^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1} = 0 \\ \sqrt{x-1} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Với x = 1 ra có y =2 (thỏa mãn điều kiện (*)).

Với x = 2 ta có y = 5 (thỏa mãn điều kiện (*)).

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x\,;y) = (1\,;2),(2\,;5)$.

Ví dụ 6: Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 4x\sqrt{8x-4} - 12y^2 - 5 = 4y^3 + 13y + \sqrt{18x-9} & (1) \\ 4x^2 - 8x + 4\sqrt{2x-1} + 2y^3 + 7y^2 + 2y = 0 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Lời giải tham khảo

Điều kiện : $x \ge \dfrac{1}{2}; y \in \mathbb{R}$ (*) x

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow 8x\sqrt{2x-1} = 4y^3 + 12y^2 + 13y + 5 + 3\sqrt{2x-1}$$
$$\Leftrightarrow [4(2x-1)+1]\sqrt{2x-1} = 4(y+1)^3 + (y+1)$$
$$\Leftrightarrow 4(\sqrt{2x-1})^3 + \sqrt{2x-1} = 4(y+1)^3 + (y+1) \quad (1a)$$

Xét hàm số $f(t) = 4t^3 + t$ với $t \in \mathbb{R}$

Ta có $f'(t) = 12t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$

Mặt khác $f(t)$ là hàm liên tục trên trên $\mathbb{R}$

Do đó phương trình

$$(1a) \Leftrightarrow f(\sqrt{2x-1}) = f(y+1) \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = y+1 \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -1 \ (**) \\ 2x = y^2 + 2y + 2 \quad (1b) \end{cases}$$

Thay (1b) và (2):

$$(y^2+2y+2)^2 - 4(y^2+2y+2) + (y+1) + 2y^3 + 7y^2 + 2y = 0$$
$$\Leftrightarrow y^4 + 6y^3 + 11y^2 + 6y = 0 \Leftrightarrow y(y^3 + 6y^2 + 11y + 6) = 0$$
$$\Leftrightarrow y(y+1)(y^2+5y+6) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -1 \\ y = -2 \\ y = -3 \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện (**) ta được y = 0 ; y = -1

Với y = 0 ta có $\sqrt{2x-1} = 1 \Leftrightarrow 2x - 1 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn điều kiện (*)).

Với y = -1 ta có $\sqrt{2x-1} = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn điều kiện (*)).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y) = (1;0), (\frac{1}{2};-1)$.

Phân tích lời giải :

Một lần nữa, giáo viên cho học sinh thấy được tính ưu việt của phương pháp hàm đặc trưng khi giải ví dụ này. Các em sẽ biến đổi phương trình (1) nhờ việc dựa vào hàm đặc trưng $f(t) = 4t^3 + t$. *Khi đó, phương trình (2) được giải quyết dựa vào phương pháp đưa về phương trình tích.*

<u>Ví dụ 7:</u> Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3\left(4y^2+1\right)+2\left(x^2+1\right)\sqrt{x}=6 & (1) \\ x^2y\left(2+2\sqrt{4y^2+1}\right)=x+\sqrt{x^2+1} & (2) \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Điều kiện: $x \geq 0$

Nhận xét $x=0$ không là nghiệm. Từ điều kiện suy ra $y>0$

$$x^2y\left(2+2\sqrt{4y^2+1}\right)=x+\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow 2y+2y\sqrt{4y^2+1}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

Xét hàm số $f\left(t\right)=t+t\sqrt{t^2+1}$, $t>0$.

$f'\left(t\right)=1+\sqrt{t^2+1}+\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}}>0$ với $t>0$ nên $f\left(t\right)$ là hàm số đồng biến.

Từ đó suy ra: $2y=\dfrac{1}{x}$ thế vào phương trình $x^3\left(4y^2+1\right)+2\left(x^2+1\right)\sqrt{x}=6$

$$x^3\left(\frac{1}{x^2}+1\right)+2\left(x^2+1\right)\sqrt{x}=6 \Leftrightarrow x\left(x^2+1\right)+2\left(x^2+1\right)\sqrt{x}=6$$

Đặt $a=\sqrt{x}>0$: phương trình $\Leftrightarrow a^2\left(a^4+1\right)+2a\left(a^4+1\right)=6$

$$\Leftrightarrow a^6+2a^5+a^2+2a-6=0 \Leftrightarrow \left(a-1\right)\left(a^5+3a^4+3a^3+3a^2+4a+3\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a^5+3a^4+3a^3+3a^2+4a+3=0 \ \left(*\right) \end{array}\right.$$

Với điều kiện $a>0$ $\left(*\right)$ vô nghiệm nên $\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1, y=\dfrac{1}{2}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình $(x;y)=(1;\frac{1}{2})$.

<u>Ví dụ 8.</u> Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{2\text{x}+1}-\sqrt{2y+1}=x-y & (1) \\ x^2-12\text{x}y+9y^2+4=0 & (2) \end{cases} \quad (\text{x,y} \in \mathbb{R})$$

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq -\dfrac{1}{2} \\ y \geq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$ (*).

Từ phương trình (2) nếu hệ phương trình có nghiệm $(x;y)$ thì $x.y \geq 0$ (**)

Ta có (1) $\Leftrightarrow \sqrt{2x+1} - x = \sqrt{2y+1} - y$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{2t+1} - t$ với $t \in \left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$, f(t) là hàm liên tục trên $\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$

Ta có $f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2t+1}} - 1 = \dfrac{1-\sqrt{2t+1}}{\sqrt{2t+1}}$; $f'(\text{t})=0 \Leftrightarrow t = 0$

Bảng biến thiên :

t	$-\dfrac{1}{2}$		0		$+\infty$
$f'(t)$		+	0	-	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Do (**) nên xảy ra các trường hợp sau :

Trường hợp 1 : $x, y \in \left[-\dfrac{1}{2};0\right)$: $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

Trường hợp 2 : $x, y \in (0;+\infty)$: $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

Do đó phương trình (1) $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

Thay x = y vào phương trình (2) ta được phương trình : $x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Kết hợp với điều kiện (*) ta được x = y = $\sqrt{2}$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y) = (\sqrt{2};\sqrt{2})$.

Phân tích lời giải:

Rõ ràng, từ phương trình (1), ta thấy ngay được phương trình đặc trưng $f(t) = \sqrt{2t+1} - t$ *, nhưng khi đó ta lại gặp trở ngại là hàm số không luôn đồng biến* *hoặc nghịch biến trên tập xác định đã chỉ ra. Khi đó ta phải xét trên từng khoảng nhỏ để suy ra tính đồng biến nghịch biến của hàm số đó.*

<u>Ví dụ 9</u>. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(17-3x)\sqrt{5-x}+(3y-14)\sqrt{4-y}=0 & (1)\\ 2\sqrt{2x+y+5}+3\sqrt{3x+2y+11}=x^2+6x+13 & (2)\end{cases} \quad (x,y\in\mathbb{R})$$

Lời giải tham khảo

Điều kiện: $\begin{cases}x\le 5\\ y\le 4\\ 2x+y+5\ge 0\\ 3x+2y+11\ge 0\end{cases}$ (*)

Ta có $(1)\Leftrightarrow\left[3(5-x)+2\right]\sqrt{5-x}=\left[3(4-y)+2\right]\sqrt{4-y}$ (1a)

Xét hàm số $f(t)=(3t^2+2)t=3t^3+2t$ với $t\in\left[0;+\infty\right)$

Ta có $f'(t)=9t^2+2>0,\forall t\in\left[0;+\infty\right)$ suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $\left[0;+\infty\right)$

Mặt khác $f(t)$ là hàm liên tục trên $\left[0;+\infty\right)$

Do đó phương trình

$(1a)\Leftrightarrow f(\sqrt{5-x})=f(\sqrt{4-y})\Leftrightarrow\sqrt{5-x}=\sqrt{4-y}\Leftrightarrow 5-x=4-y\Leftrightarrow y=x-1$

Thay $y = x - 1$ vào (2) ta được phương trình :

$$2\sqrt{3x+4}+3\sqrt{5x+9}=x^2+6x+13 \quad (2a)$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{3x+4}-2)+3(\sqrt{5x+9}-3)=x^2+6x$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x}{\sqrt{3x+4}+2}+\frac{15x}{\sqrt{5x+9}+3}=x(x+6)$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{6}{\sqrt{3x+4}+2}+\frac{15}{\sqrt{5x+9}+3}-6-x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ \dfrac{6}{\sqrt{3x+4}+2}+\dfrac{15}{\sqrt{5x+9}+3}-6-x=0 \quad (2b)\end{array}\right.$$

Với $x = 0$ ta có $y = -1$ (thỏa mãn điều kiện (*))

Giải phương trình (2b): Xét hàm số $g(x) = \frac{6}{\sqrt{3x+4}+2} + \frac{15}{\sqrt{5x+9}+3} - 6 - x$ liên tục trên $\left[-\frac{4}{3};5\right]$, ta có

$g'(x) = -\frac{9}{\sqrt{3x+4}(\sqrt{3x+4}+2)^2} - \frac{75}{\sqrt{5x+9}(\sqrt{5x+9}+2)^2} - 1 < 0, \forall x \in \left(-\frac{4}{3};5\right)$ suy ra hàm số g(x) nghịch biến trên .$\left[-\frac{4}{3};5\right]$

Mặt khác $g(-1) = 0$

Do đó phương trình $(2b) \Leftrightarrow g(x) = g(-1) \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = -2$ (thỏa mãn điều kiện (*)).

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y) = (0;-1),(-1;-2)$.

Phân tích lời giải:

Để giải được bài tập này, tha thấy ngoài phương pháp sử dụng hàm đặc trưng sử dùng cả hàm số ta còn kết hợp cả phương pháp nhân liên hợp.

- Khi gặp phương trình vô tỉ, một trong các phương pháp hay được nhắc đến đó là phương pháp nhân liên hợp. Ta thường tìm ra biểu thức liên hợp dựa vào việc nhẩm nghiệm của phương trình, thường những nghiệm đó là nghiệm duy nhất. Và vì thế, khi xác định được lượng liên hợp của biểu thức vô tỉ tương đối đơn giản, ví dụ như ở phương trình trên, ta chỉ cần phát hiện ra $x = 0$ là một nghiệm của phương trình (2a) thì khi gặp $\sqrt{3x+4}$ ta sẽ thêm bớt một hằng số để xuất hiện dạng $\sqrt{3x+4} - 2$, khi gặp $\sqrt{5x+9}$ thì ta sẽ thêm bớt một hằng số để xuất hiện dạng $\sqrt{5x+9} - 3$, khi đó sau khi nhân và chia với lượng liên hợp thì sẽ xuất hiện nhân tử chung là x.

- Đối với phương trình (2a), học sinh cũng có thể giải tiếp bằng phương pháp nhân với lượng liên hợp. Đầu tiên dùng hỗ trợ của máy tính, có thể tìm thêm được nghiệm $x = -1$ của phương trình (2a), và vì vậy, theo hướng phân tích ở trên, ta sẽ tách tiếp được như sau:

$$\frac{6}{\sqrt{3x+4}+2}+\frac{15}{\sqrt{5x+9}+3}-6-x=0$$

$$\Leftrightarrow (\frac{6}{\sqrt{3x+4}+2}-2)+(\frac{15}{\sqrt{5x+9}+3}-3)=(x+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(1-\sqrt{3x+4})}{\sqrt{3x+4}+2}+\frac{3(2-\sqrt{5x+9})}{\sqrt{5x+9}+3}=x+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(-3x-3)}{(\sqrt{3x+4}+2)(1+\sqrt{3x+4})}+\frac{3(-5-5x)}{(\sqrt{5x+9}+3)(2+\sqrt{5x+9})}=x+1$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left[-\frac{6}{(\sqrt{3x+4}+2)(1+\sqrt{3x+4})}-\frac{15}{(\sqrt{5x+9}+3)(2+\sqrt{5x+9})}-1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow x=-1$$

(vì $-\frac{6}{(\sqrt{3x+4}+2)(1+\sqrt{3x+4})}-\frac{15}{(\sqrt{5x+9}+3)(2+\sqrt{5x+9})}-1<0, \forall x\in\left(-\frac{4}{3};5\right)$)

- Theo cách giải trên, trong trường hợp nếu nhẩm thấy phương trình có hai nghiệm thì ta đã dùng phương pháp liên hợp hai lần để xuất hiện nhân tử chung. Vậy ngoài cách thêm bớt hai lần như vậy, ta còn cách nào để chỉ cần một lần thêm bơt là đã xuất hiện được nhân tử chung hay không? Khi đó cách làm xuất hiện biểu thức liên hợp như thế nào? Có thể thấy, ngoài phương pháp hàm số, phương pháp nhân liên hợp, thì chúng ta còn có thể giải hệ phương trình đại số bằng phương pháp lượng giác hóa, một trong những phương pháp tỏ ra rất hữu hiệu khi giải những bài tập dạng này. Tuy nhiên trong khuôn khổ của một sáng kiến kinh nghiệm nên tôi xin phép không đưa ra ở đây.

Tổng kết chương 2

Trong chương 2 tác giả đã xây dựng được một hệ thống các ví dụ về phương trình, bất phương trình và hệ bất phương trình để minh họa cho việc sử dụng tính chất hàm số đặc trưng để giải các bài toán đó. Trong đó có 13 ví dụ minh họa cho bài toán giải phương trình, 11 ví dụ minh họa cho bài toán giải bất phương trình và 9 ví dụ cho bài toán giải hệ phương trình đại số. Trong các ví dụ, tác giả đều có những phân tích, đánh giá cho bài toán đó.

Chương 3: THỰC NGHIỆM SỰ PHẠM

I. Mục đích của thực nghiệm sư phạm.

Nhằm kiểm nghiệm tính thực tiễn của đề tài qua thực tế giảng dạy và học tập của học sinh với mục đích tăng sự hứng thú và vui vẻ trong giờ học toán. Giúp học sinh luôn chủ động sáng tạo trong mỗi nội dung giảng dạy, tự tin khi đứng trước mỗi bài toán. Kiểm nghiệm tính khả thi và hiệu quả của đề tài thông qua các tiết học và bài kiểm tra đánh giá.

II. Tổ chức thực nghiệm sư phạm

- Chuẩn bị kiến thức nền và kiến thức liên quan đến đề tài.
- Tiến hành dạy thực nghiệm: Dạy thực nghiệm trên ba lớp 12A1, 12A2, 12A5 các tiết liên quan đến nội dung trong đề tại. Sau đó thăm dò ý kiến và cho làm bài kiểm tra.
- Đánh giá kết quả thực nghiệm (so sánh kết quả các lớp dạy thực nghiệm với các lớp không dạy thực nghiệm, giữa lớp trước khi áp dụng đề tài và sau khi áp dụng đề tài)
- Thời gian thực nghiệm: 9/2022 đến 2/2023.

III. Đánh giá kết quả thực nghiệm

Để đánh giá tính hiệu quả của đề tài, tôi chia việc áp dụng sáng kiến kinh nghiệm làm 3 giai đoạn:

Giai đoạn 1: Điều tra trước khi tiến hành thử nghiệm về ý thức học tập của học sinh trong các giờ học toán, sự tương tác của học sinh trong giờ học, mức độ hiểu bài và nắm vững kiến thức trong mỗi tiết học và đặc biệt là cách giải các bài toán về phương trình, bất phương trình và hệ phương trình đại số.

Giai đoạn 2: Dạy chuyên đề liên quan đến sáng kiến kinh nghiệm.

Giai đoạn 3: Khảo sát, lấy kết quả sau khi dạy thử nghiệm về sự hứng thú học tập môn toán của học sinh, sự tương tác của học sinh trong mỗi giờ học và đánh giá mức độ hiểu bài của mỗi học sinh.

+) Khảo sát trước thực nhiệm:

Đối với HS: lấy phiếu khảo sát và cho làm bài kiểm tra (mẫu phiếu và nội dung bài kiểm tra ở phần minh chứng)

Đối với GV: lấy phiếu khảo sát (mẫu phiếu phần minh chứng)

+) Khảo sát sau thực nghiệm:

Đối với học sinh: lấy phiếu khảo sát và cho làm bài kiểm tra (mẫu phiếu và nội dung bài kiểm tra ở phần minh chứng)

Đối với GV: lấy phiếu khảo sát (mẫu phiếu phần minh chứng)

Qua khảo sát, kết quả thực nghiệm thu được như sau:

1) Về thái độ

Thời gian điều tra	**Hứng thú**		**Bình thường**		**Không hứng thú**	
	HS	Tỉ lệ (%)	HS	Tỉ lệ (%)	HS	Tỉ lệ (%)
Trước chuyên đề	22	15%	67	47%	95	68%
Sau chuyên đề	90	64%	40	29%	10	7%

2) Về kết quả học tập môn toán

Thời gian điều tra	**Giỏi (8 – 10)**		**Khá (6,5 – 7,9)**		**Trung bình (5 – 6,4)**		**(<5)**	
	HS	***Tỉ lệ (%)***	HS	***Tỉ lệ (%)***	HS	***Tỉ lệ (%)***	HS	***Tỉ lệ (%)***
Trước chuyên đề	12	***8,5%***	55	***39%***	58	***41,5%***	15	***10%***
Sau chuyên đề	36	***26%***	60	***43%***	38	***27%***	6	***4%***

Khi áp dụng để tài trên vào việc giảng dạy môn toán ở các lớp, tôi đã thu được các kết quả sau:

- Tạo được hứng thú học tập môn toán cho học sinh trong mỗi giờ học. Học sinh rất tích cực làm bài tập được giao. Qua đó các em nắm chắc kiến thức và hiểu bài một cách sâu sắc.

Các em không còn cảm thấy sợ khi đứng trước các bài toán giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình đại số.

- Kết quả kiểm tra nội dung của chuyên đề có tính khả thi lớn. Số lượng các học sinh biết sử dụng tính chất hàm đặc trưng để giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình đại số tăng lên rõ rệt.
- Tạo được tác phong tương tác tích cực trong giờ học, tạo môi trường thi đua học tập lành mạnh, qua đó giúp các em phát huy thế mạnh cá nhân cũng như tinh thần đồng đội.
- Với đồng nghiệp, khi chia sẻ đề tài các thầy cô đều thấy hữu ích và hiệu quả trong quá trình giảng dạy của mình. Nhiều thầy cô đã vận dung rất linh hoạt và đầy hiệu quả vào trong các lớp mình giảng dạy.

Tổng kết chương 3

- Về thái độ của học sinh đới với môn học: tỉ lệ học sinh có hứng thú và cảm thấy thoải mái trong mỗi giờ học toán tăng nhanh; số học sinh cảm thấy chán nản, mệt mỏi mỗi khi học môn này giảm đi rõ rệt.

- Về kết quả học tập môn toán: Tỉ lệ học sinh đạt điểm cao trong cá bài kiểm tra nội dung giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình đại số tăng, số lượng học sinh không giải được bài toán giảm.

Qua thực tế giờ dạy và phân tích số liệu ở trên có thể kết luận:

- Học sinh hứng thú khi khi sử dụng tính chất hàm đặc trưng để giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình đại số, trong mỗi giờ học sự tương tác và phản hồi của học sinh tích cực. Học sinh cảm thấy vui vẻ và hào hứng trong mỗi giờ học toán

- Do những khó khăn trong quá trình giải toán được tháo gỡ, nên các em dễ tiếp thu bài hơn, từ đó kết quả học tập của các em tăng lên rõ rệt.

KẾT LUẬN VÀ KHUYẾN NGHỊ

I. KẾT LUẬN

Hàm đặc trưng tỏ ra rất hiệu quả trong việc giải các phương trình hay hệ phương trình. Trước một bài toán, thường có nhiều cách xử lý khác nhau, nhưng tôi nhận thấy nếu như áp dụng được phương pháp sử dụng hàm đặc trưng thì nhiều bài toán sẽ được giải quyết đơn giản, ngắn gọn hơn.

Giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình là một nội dung rất khó, tuy nhiên đây lại là nội dung quan trọng Giải tích 12. Học sinh thường khá lúng túng, e sợ của học sinh khi gặp những bài toán dạng này.

Tuy nhiên khi tôi áp dụng đề tài vào giảng dạy tôi nhận thấy có sự thay đổi đáng kể trong tâm thế và cách làm bài của học sinh. Từ chỗ lo sợ, lúng túng và không biết làm, các em đã hứng thú và đầy tự tin trong lời giải mỗi bài toán. Điều đó chứng tỏ việc sử dụng phương pháp hàm đặc trưng vào giải quyết các bài toán giải phương trình, bất phương tình và hệ phương trình là hoàn toàn khả thi và mang lại hiệu quả.

Mặc dù đã tham khảo một số lượng lớn những tài liệu tham khảo hiện nay để giảng dạy cũng như xây dựng hệ thống bài tập phong phú cho học sinh, song vì kinh nghiệm và khả năng của bản thân còn hạn chế, bài viết cũng chưa áp dụng nhiều trên các đối tượng học sinh khác nhau. Chính vì thế chắc chắn sẽ còn nhiều hạn chế và thiếu sót, rất mong nhận được ý kiến đóng góp của các bạn đồng nghiệp và các nhà quản lý để đề tài được hoàn thiện hơn và ứng dụng rộng rãi, có ý nghĩa thiết thực trong các nhà trường.

Tôi rất mong nhận được ý kiến phản hồi cũng như những đóng góp quí báu của Tổ chuyên môn, Ban giám hiệu và các đồng nghiệp.

II. KHUYẾN NGHỊ

Ban giám hiệu nhà trường thường xuyên quan tâm khích lệ những giáo viên đi đầu trong các hoạt động giảng dạy, đặc biệt là những giáo viên có nhiều tìm tòi khám phá bổ ích.

Nhà trường nên chi kinh phí để mời các chuyên gia về tập huấn cho các giáo viên, hay tổ chức các buổi sinh hoạt chuyên môn tầm cỡ khu vực hoặc các tỉnh bạn lân cận.

Tôi hy vọng đề tài được đón nhận và ứng dụng rộng rãi trong giảng dạy và trở thành tư liệu hữu ích cho học sinh cũng như giáo viên tham khảo khi dạy và học tập.

Trên đây là sáng kiến kinh nghiệm của tôi, rất mong nhận được sự góp ý của học đồng khoa học.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

TÀI LIỆU THAM KHẢO

(1) *Giải tích 12 Cơ bả*n - Trần Văn Hạo (CB)– NXB Giáo dục.

(2) *Bài tập Giải tích 12 nâng cao* – Nguyễn Huy Đoan (CB) – NXB Giáo dục.

(3) *Bài tập Giải tích 12 Cơ bản* - Trần Văn Hạo - NXB Giáo dục.

(4) *Sách giáo viên* Giải tích 12.

(5) *Tập huấn bồi dưỡng chương trình GDPT mớ*i - *GS Đỗ Đức Thái*

(6) *Giáo dục học môn toán* - Phạm Văn Hoàn, Nguyễn Gia Cốc, Trần Thúc Trình - Nhà xuất bản giáo dục Hà Nội - 1986.

(7) Các Website trên Internet, …

PHẦN MINH CHỨNG

PHIẾU KHẢO SÁT TRƯỚC KHI THỰC HIỆN SÁNG KIẾN

(Dành cho học sinh)

Em hãy cho biết ý kiến của mình bằng cách đánh dấu vào mỗi ô mà các em chọn, có thể đánh dấu nhiều lần ở mỗi câu hỏi.

Xin cảm ơn!

STT	Nội dung		Đồng ý
1	Trong các giờ học môn toán, em có dễ dàng nắm bắt kiến thức bài học hay không?	Có	
		Không	
		Bình thường	
2	Em có thường xuyên tương tác với GV trong các giờ học toán hay không?	Có	
		Không	
		Bình thường	
3	Em có thường xuyên giải các bài toán khi về nhà không?	Rất thường xuyên	
		Thường xuyên	
		Không thường xuyên	
		Chưa bao giờ	
4	Em có cảm thấy tự tin và hào hứng khi tham gia các giờ học toán không?	Rất tự tin và hào hứng	
		Không tự tin và hào hứng	
		Lo sợ và lúng túng	
		Bình thường	
5	Em cảm thấy như thế nào khi giải các bài toán về phương trình, bất phương trình và hệ phương trình đại số	Cảm thấy rất khó, thường lúng túng khi giải chúng	
		Cảm thấy bình thường	
		Cảm thấy dễ, đơn giản.	

PHIẾU KHẢO SÁT TRƯỚC KHI THỰC HIỆN SÁNG KIẾN

(Dành cho giáo viên)

Xin thầy, cô vui lòng trả lời các câu hỏi sau:

STT	Nội dung		Đồng ý
1	Thầy cô có thường xuyên giao bài tập về phương trình, bất phương trình và hệ phương trình đại số cho học sinh làm không?	Chưa bao giờ	
		Thỉnh thoảng	
		Thường xuyên	
		Rất thường xuyên	
2	Theo thầy, cô sự hứng thú và tích cực của học sinh trong các giờ học toán như thế nào?	Rất hứng thú	
		Hứng thú	
		Không hứng thú	
		Lo sợ và lúng túng	
3	Thầy cô có sử dụng tính chất hàm đặc trưng để giải phương trình, bất phương trình và hệ bất phương trình đại số không?	Có	
		Thỉnh thoảng	
		Chưa sử dụng	
5	Theo thầy cô, việc sử dụng tính chất hàm đặc trưng để giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình đại số có làm phát huy tính chủ động, sáng tạo của học sinh so với các phương pháp khác không?	Có	
		Không	
		Tương đương nhau	

PHIẾU ĐIỀU TRA SAU KHI THỰC HIỆN SÁNG KIẾN

(Dành cho giáo viên)

Xin thầy, cô vui lòng trả lời các câu hỏi sau:

STT	Nội dung		Đồng ý
1	Theo thầy, cô việc sử dụng tính chất hàm đặc trưng để giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình đại số có hữu ích hay không?	Rất hữu ích	
		Hữu ích	
		Không hữu ích	
2	Dùng tính chất hàm đặc trưng để giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình đại số có gây hứng thú cho học sinh khi học hay không?	Rất hứng thú	
		Hứng thú	
		Bình thường	
		Không hứng thú	
3	Theo thầy, cô sử dụng tính chất hàm đặc trưng để giải phương trình, bất phương trình có làm tăng hiệu quả giờ học toán hay không?	Rất hiệu quả	
		Hiệu quả	
		Không hiệu quả	
4	Nhận xét của thầy cô về của đề tài?	Rất dễ tiếp cận và áp dụng.	
		Khó hiểu và mơ hồ	
		Là một phương pháp phù hợp với cả giáo viên và học sinh	
		Thực sự có hiệu quả	

Họ và tên giáo viên: ………………………………………………………………..

Trường : ……………………………………………………….

Xin chân thành cảm ơn thầy (cô)!

PHIẾU ĐIỀU TRA SAU KHI THỰC HIỆN SÁNG KIẾN

(Dành cho học sinh)

Em hãy cho biết ý kiến của mình về nội dung "Khai thác tính chất hàm đặc trưng để giải phương trình, bất phương trình và hệ phương trình đại số" bằng cách tích vào ô đồng ý tương ứng với phương án mà em đã chọn!

STT	Nội dung		Đồng ý
1	Em có thích chuyên đề này không?	Không thích	
		Bình thường	
		Thích	
		Rất thích	
2	Em có cảm thấy hứng thú, vui vẻ trong các giờ dạy sử dụng chuyên đề này không?	Không hứng thú	
		Bình thường	
		Hứng thú	
		Rất hứng thú và vui vẻ	
3	Em có hài lòng với phương pháp mà đề tài đưa ra hay không?	Rất hài lòng	
		Hài lòng	
		Không hài lòng	
4	Em còn lo sợ và không hiểu bài khi tham gia vào các giờ học toán nữa hay không?	Không	
		Có	
		Lo sợ	
		Hiểu bài và vận dụng tốt	
5	Cảm nhận của em sau khi học chuyên đề này?	Tạo hứng thú và niềm say mê trong học tập	
		Giúp hiểu bài, mở rộng và nâng cao kiến thức	
		Giúp hình thành năng lực tự chiếm lĩnh kiến thức mới	

BÀI KIỂM TRA TOÁN 12

Thời gian làm bài: 45 phút

(Bài kiểm tra thực hiện trước khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm)

Bài 1: Giải phương trình sau: $2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}\quad (\forall x\in\mathbb{R})$

Bài 2: Giải bất phương trình sau: $2(x-2)(\sqrt[3]{4x-4}+\sqrt{2x-2})\ge 3x-1\qquad (*)$

Bài 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases}\left(2x^2y-7\right)\left(\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3xy}\right)=5\\ \sqrt{x^2\left(4+y^2\right)}-1=\sqrt{1+4x^2}-xy\end{cases}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Điều kiện: $\begin{cases}2x+4\ge 0\\ 2-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow -2\le x\le 2$ (*).

$$2\sqrt{2x+4}+4\sqrt{2-x}=\sqrt{9x^2+16}\Leftrightarrow 4(2x+4)+16(2-x)+16\sqrt{(2x+4)(2-x)}=9x^2+16$$

$$\Leftrightarrow 48-8x+16\sqrt{2(4-x^2)}=9x^2+16\quad (1)$$

$$(1)\Leftrightarrow 16\sqrt{2(4-x^2)}-8x=9x^2-32\Leftrightarrow 8(2\sqrt{2(4-x^2)}-x)=9x^2-32\quad (1a)$$

Xét trường 1:

$$2\sqrt{2(4-x^2)}+x=0\Leftrightarrow 2\sqrt{2(4-x^2)}=-x\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 0\\ x=\pm\dfrac{4\sqrt{2}}{3}\end{cases}\Leftrightarrow x=-\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

Thay $x=-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$ vào (1a) không thỏa mãn.

Xét trường 2: $2\sqrt{2(4-x^2)}+x\ne 0\Leftrightarrow x\ne -\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{8(2\sqrt{2(4-x^2}-x)(2\sqrt{2(4-x^2}+x)}{2\sqrt{2(4-x^2}+x}=9\text{x}^2-32$$

$$(1a)\ \Leftrightarrow \frac{8(8(4-x^2)-x^2}{2\sqrt{2(4-x^2}+x}=9\text{x}^2-32 \Leftrightarrow \frac{8(32-9\text{x}^2)}{2\sqrt{2(4-x^2}+x}=9\text{x}^2-32$$

$$\Leftrightarrow (9\text{x}^2-32)[1+\frac{8}{2\sqrt{2(4-x^2}+x}]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 9\text{x}^2-32=0 \\ 1+\dfrac{8}{2\sqrt{2(4-x^2}+x}=0 \end{array}\right.$$

Xét phương trình $9\text{x}^2-32=0 \Leftrightarrow x=\pm\frac{4\sqrt{2}}{3}$

Kết hợp điều kiện $x\neq-\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ta được $x=\frac{4\sqrt{2}}{3}$ thỏa mãn.

Xét phương trình

$$1+\frac{8}{2\sqrt{2(4-x^2)}+x}=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2(4-x^2)}+x+8=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2(4-x^2)}=-x-8$$

Vì $-2\le x\le 2$ nên phương trình $2\sqrt{2(4-x^2)}=-x-8$ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

Bài 2: Điều kiện: $x\ge 1$. Do $x=2$ không là nghiệm của BPT nên:

$$(*) \Leftrightarrow \sqrt[3]{4x-4}+\sqrt{2x-2}\ge\frac{3x-1}{2x-4} \qquad (1)$$

Đặt: $f(x)=\sqrt[3]{4x-4}+\sqrt{2x-2}$ và $g(x)=\frac{3x-1}{2x-4}$.

Xét hàm số $f(x)=\sqrt[3]{4x-4}+\sqrt{2x-2}$ trên $[1;+\infty)\setminus\{2\}$ có:

$$f'(x)=\frac{4}{3\sqrt[3]{(4x-4)^2}}+\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-2)^2}}>0,\ \forall x\in(1;+\infty)\setminus\{2\}.$$

Suy ra hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $[1;+\infty)\setminus\{2\}$.

Xét hàm số $g(x)=\frac{3x-1}{2x-4}$ trên $[1;+\infty)\setminus\{2\}$ có: $g'(x)=-\frac{10}{(2x-4)^2}<0,\ \forall x.$

Suy ra hàm số $g(x)$ luôn nghịch biến trên $[1;+\infty)\setminus\{2\}$.

Nếu $x \ge 3 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \ge f(3) = 4 \\ g(x) \le g(3) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) \ge 4 \ge g(x) \Leftrightarrow f(x) \ge g(x).$

Hay $\sqrt[3]{4x-4} + \sqrt{2x-2} \ge \dfrac{3x-1}{2x-4} \Leftrightarrow x \ge 3.$ Suy ra nghiệm (1) là $x \in [3;+\infty).$

Nếu $x < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < f(3) = 4 \\ g(x) > g(3) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow f(x) < 4 < g(x) \Leftrightarrow f(x) < g(x).$

Hay $\sqrt[3]{4x-4} + \sqrt{2x-2} < \dfrac{3x-1}{2x-4} \Leftrightarrow x < 3$ nên (1) vô nghiệm khi $x < 3.$

Kết luận : Giao với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là: $x \in [3;+\infty).$

Bài 3: Xét hệ phương trình $\begin{cases} \left(2x^2y-7\right)\left(\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3xy}\right)=5 & (1) \\ \sqrt{x^2\left(4+y^2\right)}-1=\sqrt{1+4x^2}-xy & (2) \end{cases}$

+) Điều kiện: $\begin{cases} x \ge \dfrac{2}{3} \\ x+3xy \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{2}{3} \\ y \ge -\dfrac{1}{3} \end{cases}$.$(*)$

+) Với điều kiện $(*)$, từ $(2) \Rightarrow \sqrt{\left(y^2+4\right)}+y=\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+4}+\dfrac{1}{x}.$ $\quad (3)$

+) Xét hàm số: $f(t)=\sqrt{\left(t^2+4\right)}+t,\ t \ge -\dfrac{1}{3}.$

Ta có $f'(t)=\dfrac{t}{\sqrt{\left(t^2+4\right)}}+1>0, \forall t \ge -\dfrac{1}{3}.$ Suy ra, hàm số $f(t)=\sqrt{\left(t^2+4\right)}+t$ đồng biến trên $\left[-\dfrac{1}{3};+\infty\right).$

Mặt khác $f(t)$ liên tục trên $\left[-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$. Do đó, từ $(3) \Leftrightarrow f(y)=f\left(\dfrac{1}{x}\right) \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{x}.$

+) Thay $y=\dfrac{1}{x}$ vào (1), ta được: $(2x-7)\left(\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3}\right)=5.$ $\quad (4)$

Nhận thấy, $x=\dfrac{7}{2}$ không là nghiệm của (4), nên (4) có thể viết lại:

$$\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3}=\frac{5}{2x-7} \Leftrightarrow \sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3}-\frac{5}{2x-7}=0.$$

Đặt $g(x)=\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+3}-\dfrac{5}{2x-7}$, $\forall x\ge \dfrac{2}{3}, x\ne \dfrac{7}{2}$.

$$g'(x)=\frac{3}{2\sqrt{3x-2}}-\frac{1}{2\sqrt{x+3}}+\frac{10}{(2x-7)^2}=\frac{3\sqrt{x+3}-\sqrt{3x-2}}{2\sqrt{x+3}.\sqrt{3x-2}}+\frac{10}{(2x-7)^2}$$

$$=\frac{6x+29}{2\sqrt{x+3}.\sqrt{3x-2}\left(3\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}\right)}+\frac{10}{(2x-7)^2}>0,\ \forall x>\frac{2}{3}, x\ne\frac{7}{2}.$$

Suy ra $g(x)$ đồng biến trên $\left[\dfrac{2}{3};\dfrac{7}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{7}{2};+\infty\right)$.

Mà $g(1)=g(6)=0$, nên (4) có hai nghiệm $x=1, x=6.$

+) Vậy nghiệm $(x;y)$ của hệ phương trình là $(1;1)$ và $\left(6;\dfrac{1}{6}\right)$.

BÀI KIỂM TRA TOÁN 12

Thời gian làm bài: 45 phút

(Bài kiểm tra thực hiện sau khi áp dụng sáng kiến kinh nghiệm)

Bài 1: Giải phương trình sau: $x^3+3x^2+4x+2=(3x+2)\sqrt{3x+1}\quad (x\in\mathbb{R})$

Bài 2: Giải bất phương trình sau : $\sqrt{x^2-2x+3}-\sqrt{x^2-6x+11}>\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}$

Bài 3: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3-3\left(2x^2-y^2+2y\right)+15x-10=0 \\ \sqrt{2-y}+\sqrt{3-x}=2x-2 \end{cases}\left(x;y\in\mathbb{R}\right)$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: Điều kiện: $x\ge -\dfrac{1}{3}$ (*).

$x^3+3x^2+4x+2=(3x+2)\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow (x+1)^3+(x+1)=(\sqrt{3x+1})^3+\sqrt{3x+1}$ (1)

Xét hàm số f(t) = t^3 + t với $t\in\mathbb{R}$

Ta có f'(t) = $3t^2+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác f(t) là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$

Do đó phương trình

$$(1)\Leftrightarrow f(x+1)=f(\sqrt{3x+1})\Leftrightarrow x+1=\sqrt{3x+1}\Leftrightarrow \begin{cases} x+1\ge 0 \\ 3x+1=(x+1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x^2-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$$ (thỏa mãn điều kiện (*)).

Vậy tập nghiệm của phương trình là $T=\{0;1\}$

Bài 2: Điều kiện: $1\le x\le 3$.

$(*)\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+2}+\sqrt{x-1}>\sqrt{(3-x)^2+2}+\sqrt{3-x} \Leftrightarrow f(x-1)>f(3-x).$

Do $1\le x\le 3\Rightarrow \begin{cases} 0\le x-1\le 4 \\ 0\le 3-x\le 4 \end{cases}$. Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t^2+2}+\sqrt{t}$ trên $[0;4]$ có:

$f'(t)=\frac{t}{2\sqrt{t^2+2}}+\frac{1}{2\sqrt{t}}>0,\ \forall x\in(0;4]\Rightarrow f(x)$ đồng biến trên $[0;4]$.

Nên ta có: $f(x-1)>f(3-x)\Leftrightarrow x-1>3-x\Leftrightarrow x>2.$

Kết luận: Giao với điều kiện, tập nghiệm của bất phương trình là $x\in(2;3]$.

Bài 3 : Điều kiện : $\begin{cases}x\le 3\\ y\le 2\end{cases}$.

Phương trình thứ nhất của hệ tương đương với :

$(x-2)^3+3(x-2)=(y-1)^3+3(y-1)\qquad(1)$

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t,(t\in\mathbb{R})$.

Khi đó ta có $f'(t)=3t^2+3>0,\forall t\in\mathbb{R}$. Do đó $f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Nên phương trình (1) trở thành $f(x-2)=f(y-1)\Leftrightarrow x-2=y-1\Leftrightarrow y=x-1$.

Thay $y=x-1$ vào phương trình thứ hai ta được: $2\sqrt{3-x}=2x-2\Leftrightarrow\sqrt{3-x}=x-1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ 3-x=x^2-2x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$$

Với $x=2$ thì $y=1$ (thỏa mãn).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm là $(x;y)=(2;1)$.